Math. un. 72^z Hoffman

(4)

30

Der

mathematische Jugendfreund

oder

populäre Darstellung der Grundlehren

der

Stereometrie

für

Anfänger,

von

Joh. Jos. Ign. Hoffmann,

Königlich Bayerischem Hofrathe, Director des Königl. Lyceums zu Aschaffenburg, Professor der Mathematik und Physik am Königl. Lyceum, erstem Professor an dem Königl. Forst-Lehrinstitute, Mitgliede der Werterauischen Gesellschaft für die gesammte Naturkunde, der Kaiserlich-Leopoldinisch-Carolinischen Academie der Naturforscher zu Bonn, der Senkenbergischen naturforschenden Gesellschaft zu Frankfurt am Main, der Gesellschaft zur Beförderung nützlicher Künste und deren Hülfswissenschaften daselbst, und der Herzoglich-Sachsen-Gothaischen und Meiningischen Societät der Forst- und Jagdkunde zu Dreisigacker.

Der geometrischen Abtheilung zweiter Band.

Die

Elemente der Stereometrie,

nebst

Anwendungen der Algebra auf die Raumlehre.

Mit sieben Steintafeln.

Mainz, 1827.

Bei Florian Kupferberg.

Der

stereometrische Jugendfreund

oder

populäre Darstellung der Grundlehren

der

Stereometrie

für

Anfänger,

von

Joh. Jos. Ign. Hoffmann,

Königlich Bayerischem Hofrathe, Director des Königl. Lyceums zu Aschaffenburg, Professor der Mathematik und Physik am Königl. Lyceum, erstem Professor an dem Königl. Forst-Lehrinstitute, Mitgliede der Wetterauischen Gesellschaft für die gesammte Naturkunde, der Kaiserlich-Leopoldinisch-Carolinischen Academie der Naturforscher zu Bonn, der Senkenbergischen naturforschenden Gesellschaft zu Frankfurt am Main, der Gesellschaft zur Beförderung nützlicher Künste und deren Hülfswissenschaften daselbst, und der Herzoglich-Sachsen-Gothaischen und Meiningischen Societät der Forst- und Jagdkunde zu Dreisigacker.

Mit sieben Steintafeln.

Mainz, 1827.
Bei Florian Kupferberg.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorwort.

Hierbei folgt der vierte Band des mathematischen Jugendfreundes, welcher den Grundlehren der Stereometrie gewidmet ist. Nach meinem frühern Plane, (Geometrische Anschauungslehre, 3. Auflage, 1823, V — XXIV) dessen Zweckmäßigkeit für den Lehrvortrag sich bisher vielfach bestättiget hat, mußte auch hier das anschauliche Element der Raumlehre gehörig berücksichtigt werden, um die Lehren der stereometrischen Wissenschaft mit gebührender Evidenz zu entwickeln. Zur Kürze des Vortrags ist die unmittelbare Anschauung, die Darstellung in der Zeichnung und die Bestimmung des Begriffs der einzelnen stereometrischen Objecte zusammen verbunden worden.

Zur Aufklärung der bloßen Anschauung dienet am Füglichsten jener Versinnlichungs-Apparat, dessen bereits früher (Stereometrische Anschauungs- und Wissenschaftslehre. Mainz, 1820, S. VI — VIII) erwähnt worden ist, und welchen der Herr Verleger dieser Schrift im billigen Preise abgibt. Er enthält folgende Modelle:

1) Die ebene Fläche oder die Ebene;
2) Die einfach gekrümmte Fläche;
3) Die doppelt gekrümmte Fläche;
4) Die senkrechte Linie auf der Ebene;
5) Die schiefe Linie auf der Ebene;

6) Den Neigungswinkel der schiefen Linie auf der Ebene;
7) Die senkrechte Ebene auf der Ebene;
8) Die schiefe Ebene auf einer Ebene;
9) Den Neigungswinkel zweier Ebenen;
10) Die gleichlaufenden Ebenen;
11) Die zusammen- und auseinanderlaufenden Ebenen;
12) Die Nebenwinkel und Scheitelwinkel bei Durchschnittsebenen;
13) Die Durchschnittswinkel gleichlaufender Ebenen durch eine dritte;
14) Den Körperwinkel aus drei Seitenebenen;
15) Den Körperwinkel aus vier, fünf und mehreren Seitenebenen;
16) Das senkrechte dreieckige Prisma;
17) Das schiefe dreieckige Prisma;
18) Das senkrechte Parallelopipedum;
19) Das schiefe Parallelopipedum;
20) Das senkrechte viereckige Prisma;
21) Das schiefe viereckige Prisma;
22) Den senkrechten Cylinder;
23) Den schiefen Cylinder;
24) Die senkrechte dreieckige Pyramide;
25) Die schiefe dreieckige Pyramide;
26) Die senkrechte viereckige Pyramide;
27) Die schiefe viereckige Pyramide;
28) Den senkrechten Kegel;
29) Den schiefen Kegel;
30) Die Kugel;
31) Das Octaëder;

32) Den Würfel;
33) Das Octaëder;
34) Das Icosaëder und
35) Das Dodecaëder.

Die Fertigkeit im Zeichnen der verschiedenen Lagen der Ebenen und der stereometrischen Körper erwirbt man sich am Sichersten durch eigene Uebung.

Wenn hierdurch die Anschauung vollkommen aufgeklärt ist, so wird man sich dann leicht von ihr zum deutlichen Begriffe erheben.

Die Gegenstände, welche diesem vierten Bande im neunten Lehrgange als Anhang beigegeben sind, werden, wie es dem Verfasser scheint, die Theilnahme der Liebhaber erwecken.

Zuerst wird die Exhaustions-Methode der alten Geometer in einigen Anwendungen aus Euclides und Archimedes aufgeklärt; eine Methode, welche damals die Stelle unserer Analysis des Unendlichen vertreten und sich durch das Originelle ihrer Darstellung auch heut zu Tage noch berühmt gemacht hat. Für die Anfänger des mathematischen Studiums konnten indessen nicht alle Arten derselben beigebracht werden.

Auf ähnliche Weise sind die Data des Euclides von besonderm Interesse. Da in den gewöhnlichen Compendien der Geometrie gar nichts von ihnen vorkömmt, so sind einige Beispiele davon, zur Kenntniß ihres Begriffs und Gebrauchs, hier aufgenommen worden.

Auch bieten die Lemmen des Archimedes, welche ebenfalls nicht in den Lehrbüchern gefunden werden,

eine Reihe wissenswürdiger Sätze dar. Sie sind hier ohne Beweise, aber doch mit Verzeichnung der hierzu nöthigen Hülfslinien, sämmtlich vorgetragen worden, damit der Leser hierin würdigen Stoff zur geistigen Selbstübung finde.

Endlich ist noch Etwas von den Porismen beigegeben worden, um diese merkwürdigen Sätze der Geometer des Alterthums an einigen leichten Beispielen zu erläutern.

Der nächste Band dieses populären Lehrbegriffs der gesammten Mathematik, welcher die Elemente der höhern Geometrie enthält, wird dem gegenwärtigen vierten baldmöglichst nachfolgen.

Aschaffenburg, im März 1827.

Der Verfasser.

Uebersicht des vierten Bandes.

Erster Lehrgang.

Grundanschauungen und Erklärungen von den Ebenen und Körperwinkeln.

I. Lehrübung. Seite

Arten der Flächen. Linien auf Ebenen. Ebenen auf Ebenen 3

II. Lehrübung.

Lage der sich nicht schneidenden Ebenen. Körperwinkel . 13

Zweiter Lehrgang.

Grundanschauungen und Erklärungen von Körpern.

I. Lehrübung.

Prismatische Körper. 22

II. Lehrübung.

Pyramidalische Körper 39

III. Lehrübung.

Die Kugel und die regelmäßigen Körper. 51

Seite

Dritter Lehrgang.

Darstellung der Körper in der Ebene.

I. Lehrübung.

Darstellung der wichtigsten Lagen der Linien und Ebenen durch einfache Zeichnungen 61

II. Lehrübung.

Darstellung der sich nicht schneidenden Ebenen und der Körperwinkel 65

III. Lehrübung.

Darstellung der verschiedenen Körper durch Zeichnungen, nebst dem Begriffe ihrer Gleichheit, Aehnlichkeit und Congruenz 70

Vierter Lehrgang.

Wissenschaftliche Vorbertitungslehren von der Lage der Ebenen und Linien, gegen Ebenen.

I. Lehrübung.

Wissenschaftliche Bestimmung der Lage gerader Linien, welche auf Ebenen aufgestellt sind 95

II. Lehrübung.

Wissenschaftliche Bestimmung der Lage der Ebenen gegen einander. 109

Fünfter Lehrgang.

Wissenschaftliche Construction der Körperwinkel und der Körper.

I. Lehrübung.

Von den Körperwinkeln 115

II. Lehrübung.

Construction der prismatischen und regelmäßigen Körper . 123

Seite

Sechster Lehrgang.

Wissenschaftliche Entwickelung der stereometrischen Raumverhältnisse.

I. Lehrübung.

Raumverhältnisse der prismatischen Körper 139

II. Lehrübung.

Raumverhältnisse der pyramidalischen Körper und der Kugel 157

III. Lehrübung.

Raumverhältnisse aus der Aehnlichkeit der Körper . . 171

Siebenter Lehrgang.

Wissenschaftliche Berechnungen des Inhaltes und der Oberflächen der Körper.

I. Lehrübung.

Allgemeine Vordersätze und Berechnung des Inhaltes . 180

II. Lehrübung.

Berechnung der Oberflächen der Körper 212

Achter Lehrgang.

Anwendungen der Algebra auf Linien, Flächen und Körper.

I. Lehrübung.

Algebraische Entwickelung von Linien-Verhältnissen . . 240

II. Lehrübung.

Algebraische Entwickelung von Flächen-Verhältnissen . . 257

III. Lehrübung.

Algebraische Entwickelung von Körper-Verhältnissen . . 276

Seite

Neunter Lehrgang.

Anhang zur gesammten Raumlehre.

I. Lehrübung.
Begriff und Anwendungen der Exhaustions-Methode . 285

II. Lehrübung.
Data des Euclides. 298

III. Lehrübung.
Lemmen des Archimedes 308

IV. Lehrübung.
Etwas von den Porismen der Alten 312

Der
stereometrische Jugendfreund,
oder
die Elemente der Stereometrie
für
Anfänger.

Die Elemente der Stereometrie

nebst

Anwendungen der Algebra auf die Raumlehre.

Erster Lehrgang.

Grundanschauungen und Erklärungen von den Ebenen und Körperwinkeln

I. Lehrübung.

Arten der Flächen. Linien auf Ebenen. Ebenen auf Ebenen.

§. 1.

Flächen und ihre Arten.

I. Aus der Elementargeometrie ist bekannt, daß man bei dem Raume überhaupt drei verschiedene Objecte unterscheidet, nämlich: Linien, Flächen und Körper. Wenn die Linie jene Ausdehnung im Raume darstellt, woran man nur eine Länge erkennt, so zeigt die Fläche ausser dieser Länge noch eine Ausdehnung in die Breite und der Körper eine Ausdehnung nach Länge, Breite und Tiefe an. Ebenso bekannt ist es, daß die Gränze des Kör-

pers eine Fläche sei, da die Grenzen des Körperlichen nicht selbst wieder körperlich seyn können. Die Anschauung irgend eines physischen Körpers stellt auch die Anschauung einer Fläche dar, wenn man von seinem eigentlichen Körperlichen absieht, und nur seine Gränze betrachtet. Man kann daher die Fläche überhaupt dadurch erklären, daß man sie als einen Raum betrachtet, an welchem nur zwei Hauptausdehnungen nach Länge und Breite unterschieden werden, und woran durchaus keine Dicke oder Tiefe wahrgenommen wird. Dieser Begriff ist höchst einfach und erhebt sich kaum noch über die Anschauung, woraus er hervorgeht. Ein solches Verhältniß hat überhaupt bei der Erklärung einfacher Begriffe statt, zumal der geometrischen, welche ihre Evidenz lediglich aus der Klarheit der ihnen entsprechenden Anschauungen schöpfen.

II. Eine besondre Art der Fläche ist die ebene Fläche oder die Ebene, deren Anschauung auf mancherlei Weise klar werden kann. So stellt z. B. die Oberfläche des in einem Gefäße ruhig stehenden Wassers, irgend ein Stück wohlgeleimter, durch Schlagen und Pressen wohlgeebneter Pappe, ein durch die Hobel wohl geebnetes Brettchen u. dgl. der Anschauung ein sinnliches Bild von der Ebene dar. Es ist klar, daß diese Anschauung hier ganz unabhängig ist von der physischen Natur des zur Erläuterung dienenden Körpers. Denn die Anschauung der Ebene geht weder aus dem Wasser, noch aus dem Holze als solchem hervor, sondern lediglich aus Betrachtung der Gränze, wo diese Körper aufhören.

Aus dieser Anschauung folgt der Begriff der ebenen Fläche oder der Ebene. Sie ist nämlich jene Fläche, welche nach allen Richtungen ihrer Länge und Breite sich geradehin erstreckt und nirgends gekrümmt ist. Daher setzt man das Eigenthümliche der Ebene auch darin, daß eine gerade Linie, nach allen nur möglichen Richtungen hin, jedesmal mit ihrer ganzen Länge auch ganz in sie hineinfalle. Somit könnte man die Ebene auch eine durchaus gerade Fläche nennen, indem sich nirgendswo etwas Gekrümmtes in ihr zeigt. Diese Erklärung der ebenen Fläche ist aber so wenig eine streng logische, als die Erklärung der geraden Linie in der Elementargeometrie eine solche war. Das Gerade und Krumme an den Objecten des Raums wird mit weit größerer Klarheit aus der unmittelbaren Anschauung, als aus dem Begriffe erkannt.

III. Eine Fläche, welche nicht eben ist, wird eine gekrümmte oder krumme Fläche genennt, und die einfachste Art derselben ist die einfach gekrümmte Fläche. Wenn man ein vierkantiges Stück steifen Papiers walzen- oder kegelförmig zusammenbiegt, so stellt es der Anschauung eine einfach gekrümmte Fläche dar. Die Anschauung erkennt hier sogleich, daß es in dieser Fläche nach manchen Richtungen hin gerade Stellen gibt, d. h. solche, in welchen eine gerade Linie mit ihrer ganzen Ausdehnung fällt; aber es gibt auch nach vielen andern Richtungen hin nur gekrümmte Stellen d. h. solche, welche von einer geraden Linie nicht durchaus bedeckt werden. Aus dieser Anschauung der einfach ge-

krümmten Fläche geht ihr Begriff hervor. Es wird nämlich nur jene Fläche so genennt, in welche gerade Linien nach vielen Richtungen ganz und gar; nach vielen andern aber nicht einmal mit zwei ihrer Puncte fallen können. Wenn man sich die krumme Seitenfläche einer Walze denkt, oder einen solchen von Holz oder Pappe verfertigten Körper vor sich hat, so stellt dessen krumme Seitenfläche eine einfache Krümmung dar. Denn man erkennt sogleich, daß sich in dieser krummen Fläche, von oben nach unten, gerade Linien ziehen lassen, welche ganz in sie hineinfallen; aber ebenso klar ist es auch, daß jede, nach irgend einer schiefen Richtung in ihr gezogene Linie keine gerade, sondern eine krumme sei.

IV. Eine andere Art der gekrümmten Flächen bieten die doppeltgekrümmten, oder die Flächen von doppelter Krümmung dar. Wenn man z. B. eine Kugel von Holz oder von irgend einer andern Materie vor sich hat und ihre äussere Oberfläche betrachtet, so lehrt die Anschauung unwidersprechlich, daß eine gerade Linie auch nicht nach einer einzigen Richtung hin ganz in sie hineinfallen kann, sondern dieselbe überall nur in einem Puncte berührt. Eben dieses zeigen, ausser der Kugel, noch viele andere rundliche Körper an ihren Oberflächen, welche ebenfalls von doppelter Krümmung erscheinen.

Auf dieser Anschauung beruht die Erklärung der doppeltgekrümmten Flächen, nach welcher es diejenigen sind, in die eine gerade Linie nach keiner einzigen Richtung ganz fallen kann, und man erkennt

auch hier wieder, daß der Begriff eigentlich nichts andres aussprechen kann, als was die Anschauung schon gegeben hat.

Da die Natur der doppelten Krümmung sonach in einer Krümmung nach jeder Richtung der Länge und Breite besteht, so ist jede doppeltgekrümmte Fläche eigentlich eine allseitig gekrümmte.

§. 2.

Gerade Linien auf Ebenen.

I. Wenn man irgend einen geraden, dünnen Körper von einiger Länge, z. B. ein Holzstäbchen oder eine Stricknadel dergestalt auf ein ebenes Brettchen stellt, daß dieses mit einem Ende von ihm berührt wird und der Körper eine solche Stellung erhält, nach welcher derselbe weder zur einen noch zur andern Seite mehr oder weniger hingeneigt ist, so stellt diese Anschauung eine auf der Ebene senkrecht oder lothrecht stehende Linie dar. Man kann mit längeren oder kürzeren Stäbchen dasselbe Verhältniß ihrer Lage zur Anschauung bringen und hierdurch jedesmal den lothrechten Stand der Linie erkennen.

Drückt man das, was hier die Anschauung von physischen Körpern gelehrt hat, rein geometrisch aus, so nennt man eine gerade Linie dann auf einer Ebene senkrecht stehend, wenn sie die Eigenschaft hat, daß sie mit jeder geraden Linie, welche aus ihrem Berührungspuncte mit der Ebene in dieser Ebene gezogen wird, einen rechten Winkel bildet. Dieser Begriff wird ebenfalls dadurch anschaulich, daß man in einer Ebene mehrere gerade, sich in

einem Puncte schneidende Linien zieht, und auf diesen Punct z. B. eine Stricknadel so lange hin und her bewegt, bis jeder Winkel, welchen sie mit ihnen bildet, dem Anscheine nach ein rechter ist.

Man sieht sogleich, daß diese Erklärung vom senkrechten Stande einer geraden Linie auf der Ebene nichts, als eine Worterklärung sei, welche zuerst durch die Sätze der stereometrischen Wissenschaftslehre seine eigentlich wissenschaftliche Begründung erhalten muß. Denn wie ist, kann man fragen, eine gerade Linie auf der Ebene möglich, welche mit jeder der unzählich vielen, aus ihrem Berührungspuncte in der Ebene möglichen Linie einen rechten Winkel macht. Daher wird die Möglichkeit solcher Linien erst weiter unten entwickelt.

II. Wenn man das vorhinbemerkte Stäbchen von Holz oder Metall dergestalt auf die Ebene stellt, daß seine Neigung gegen die Ebene nach verschiedenen Richtungen hin selbst verschieden ist, so gibt diese Anschauung das Bild einer auf der Ebene schiefstehenden geraden Linie. Auch ist es leicht, den Stand dieser Linie als einen mehr oder weniger schiefen anschaulich zu machen, um die Ueberzeugung zu gewinnen, daß ihr schiefer Stand unendlich mannigfaltig seyn könne.

Auf dieser Anschauung beruht die Erklärung, nach welcher eine gerade Linie dann auf einer Ebene schief steht, wenn sie nicht mit jeder geraden, welche durch ihren Berührungspunct gezogen wird, einen rechten Winkel bildet. Man sieht sogleich, daß auch diese Erklärung in sofern eine

bloße Worterklärung ist, als man aus ihr die nothwendige Bedingniß zum schiefen Stande noch nicht erkennt. Denn die Anschauung lehrt z. B. daß eine gerade Linie mit zwei in der Ebene liegenden Linien (welche aber eine einzige gerade bilden müssen) rechte Winkel machen, und doch auf der Ebene schief stehen kann.

III. Wenn ein langes schmales Stäbchen, der Anschauung nach, auf der Ebene schief steht, so kann man wohl fragen: *was für eine Neigung* diese schiefe Linie gegen die Ebene habe, oder wie groß ihr Neigungswinkel sei. Zur Erläuterung denke man sich ein aus steifer Pappe oder aus einem dünnen Brettchen geschnittenes, rechtwinkeliges Dreieck von ungleichen Catheten, stelle dasselbe mit der kürzeren Cathete so, daß diese in irgend eine Ebene fällt und daß nun die größere Cathete lothrecht auf dieser Ebene steht. Hier stellt nun die Hypotenuse eine *auf der Ebene schiefstehende* gerade Linie vor, und jener spitze Winkel, welchen sie mit der kleineren Cathete bildet, ist ihr *Neigungwsinkel* gegen die Ebene. Man kann diese Anschauung des Neigungswinkels durch die veränderte Lage, indem z. B. das rechtwinkelige Dreieck mit der größern Cathete auf die Ebene gestellt oder ein anderes gewählt wird, auf mancherlei Weise abändern. Der aus dieser Anschauung hervorgehende Begriff des *Neigungswinkels* einer geraden, auf der Ebene schiefstehenden Linie ist folgender. Man wähle in dieser schiefen Linie irgend einen beliebigen Punct, denke sich von demselben eine auf der Ebene lothrecht stehende Linie

und von dem Puncte, wo sie in derselben eintrifft, eine gerade Verbindungslinie mit dem Fußpuncte der schiefstehenden, so ist der an demselben liegende Winkel der Neigungswinkel der schiefen Linie. Man erkennt aber sogleich, daß diese Erklärung des Neigungswinkels nur eine Worterklärung ist, weil sie die wissenschaftlich zu lösende Aufgabe voraussetzt, aus einem über einer Ebene gegebnen Puncte ein Loth auf dieselbe zu errichten.

§. 3.

Ebenen auf Ebenen.

I. Um den lothrechten Stand einer Ebene gegen eine andre anschaulich zu machen, kann man sich am Bequemsten zweier Brettchen von verschiedener Größe und von der Gestalt zweier Rechtecke bedienen. Wenn nun eines derselben so auf das andre gestellt wird, daß seine Seitenlinie ganz in dessen Ebene fällt und dasselbe zur Rechten nicht mehr, als zur Linken geneigt ist, so stellt die zweite Ebene eine auf der ersten lothrecht stehende dar. Es ist leicht, dieser Anschauung dadurch eine größere Mannigfaltigkeit zu geben, daß man die beiden physischen Ebenen bald mit ihren schmäleren, bald mit ihren längeren Seiten, bald gegen die Mitte der einen und bald an die Gränze derselben aufstellt. So wie nun die erste Ebene auf der zweiten lothrecht steht, so ist auch wiederum die zweite senkrecht auf der ersten.

Der wissenschaftliche Begriff von dem senkrechten Stande einer Ebene auf einer andern bezieht sich auf ihren Neigungswinkel mit derselben, und man sagt, sie stehe auf ihr lothrecht, wenn dieser Neigungswinkel ein rechter ist. Zur Bestimmung dieses Neigungswinkels nehme man in jener geraden Linie, welche den Durchschnitt beider Ebenen bildet, einen beliebigen Punct an, ziehe aus ihm auf diese Durchschnittslinie in jeder der zwei Ebenen ein Loth, so bilden diese beiden Lothe unter sich einen Winkel, welcher der Neigungswinkel beider Ebenen ist. Wird nun dieser Winkel ein rechter, so steht eine Ebene auf der andern lothrecht.

II. Hieraus ist es leicht, eine physische Ebene auf eine andre so zu stellen, daß sie einen schiefen Stand gegen sie hat, und die Anschauung wird leicht erkennen, wenn eine Ebene mehr oder weniger schief gegen eine andre geneigt ist. Der wissenschaftliche Begriff von dem schiefen Stande einer Ebene auf der andern hängt von ihrem senkrechten Stande ab, welcher, sobald er auf irgend eine Weise verändert wird, sogleich in den schiefen übergeht.

III. Daher ist es klar, daß zwei Ebenen auf einander schief stehen, wenn ihr Neigungswinkel kein rechter ist. Wenn man nämlich aus einem willkührlichen Puncte ihrer geraden Durchschnittslinie ein Loth errichtet, welches in der einen, und ein zweites Loth, welches in der andern Ebene liegt, so wird, wenn der Winkel dieser Lothe kein rechter ist, die eine Ebene auf der andern schief stehen, und der eben bemerkte Winkel ihr Neigungswinkel seyn.

Wenn man seinen Schenkel in der Ebene, worauf die andere steht, rückwärts über seinen Scheitelpunct verlängert, so entsteht ein zweiter Neigungswinkel, welcher der Nebenwinkel des ersten und stumpf oder spitz ist, je nachdem jener ein spitzer oder ein stumpfer Winkel war.

Da die wirkliche Construction des Neigungswinkels zweier Ebenen durch die gewöhnliche Elementargeometrie ausgeführt werden kann, indem sie nichts, als die Aufgabe voraussetzt, aus einem in einer geraden Linie gegebenen Puncte ein Loth auf sie zu errichten, so sind die hier gegebenen Erklärungen auch jetzt schon als Sacherklärungen zu betrachten.

§. 4.

Uebungs-Fragen.

I. Wieviele Hauptobjecte unterscheidet man in dem Raume? Was sind Linien, Flächen, Körper? Was sind ebene Flächen oder Ebenen? Was sind gekrümmte Flächen? Wievielerlei sind sie? Was sind einfach gekrümmte, was doppelt gekrümmte Flächen? Beispiele von Beiden? Warum heissen doppelt gekrümmte Flächen auch allseitig gekrümmte? Erläuterung darüber? (§. 1.)

II. Wie läßt sich eine auf der Ebene senkrecht stehende Linie durch die Anschauung darstellen? Wann steht eine gerade Linie auf einer Ebene lothrecht? Ist diese Erklärung vom Lothe eine Sach- oder eine Wort-Erklärung? Und Warum? Was bleibt also hier der stereometrischen Wissenschaft noch zu beweisen übrig? — Wie läßt sich eine auf der Ebene schief stehende Linie anschaulich darstellen? Wann steht eine gerade Linie schief auf der Ebene? Sind dieses Sach- oder Wort-Erklärungen? Wie wird

der Neigungswinkel einer schief stehenden Linie bestimmt durch die Anschauung? Was ist der Begriff dieses Neigungswinkels? Was hat das Loth für einen Neigungswinkel? (§. 2.)

III. Wie wird der senkrechte Stand einer Ebene auf einer andern durch die Anschauung erläutert? Was ist der Neigungswinkel zweier auf einander schief stehenden Ebenen? Wann stehen Ebenen schief, wann lothrecht auf einander? Sind dieses Sach- oder Wort-Erklärungen? (§. 3.)

II. Lehrübung.

Lage der sich nicht schneidenden Ebenen. Körperwinkel.

§. 1.

Lage zweier sich nicht schneidenden Ebenen.

I. Gleichwie die Anschauung den Durchschnitt zweier Ebenen aufgeklärt hat, so ist sie auch geschickt, ihren Parallelismus zur Klarheit zu bringen. Wenn man irgend zwei physische Ebenen, z. B. zwei viereckige Brettchen von Holz so gegeneinander hält, daß sie sich, wenn sie in Gedanken nach allen Richtungen ihrer Länge und Breite verlängert würden, niemals einander durchschnitten, so stellen sie die parallele Lage zweier Ebenen dar. Man kann dieselbe auch dadurch anschaulich machen, daß zwei Ebenen auf eine dritte lothrecht, oder gleich schief geneigt aufgestellt werden, wo denn diese beiden ebenfalls zwei gleichlaufende Ebenen darstellen. Die Anschauung gewinnt noch größere Mannigfaltigkeit

dadurch, daß man beide Ebenen theils einander näher bringt, theils mehr von einander entfernt.

Die wissenschaftliche Bestimmung des Parallelismus zweier Ebenen ist jener sehr ähnlich, welche die Elementargeometrie von zwei Parallellinien gibt. Zwei Ebenen, welche ausser einander liegen und eine solche Lage gegen einander haben, daß sie sich, wenn sie auch beide nach allen Richtungen hin verlängert würden, doch niemals durchschneiden, werden parallele oder gleichlaufende Ebenen genennt. Man erkennt sogleich, daß diese Erklärung durchaus keine genetische, d. h. keine solche ist, welche die wissenschaftliche Construction solcher Ebenen überzeugend nachweiset. Es muß daher der stereometrischen Wissenschaftslehre vorbehalten bleiben, das hier noch Unbefriedigende zu ergänzen.

II. Wenn zwei physische Ebenen dergestalt gegeneinander geneigt werden, daß eine die andre wirklich durchschneidet, oder daß sie dieselbe bei ihrer Verlängerung durchschneiden würde, so stellen beide der Anschauung theils zusammenlaufende, theils auseinanderlaufende Ebenen dar. Diese Anschauungen können ebenfalls durch zwei Ebenen, welche man auf eine dritte stellt und in verschiedene Lagen unter sich bringt, noch weiter aufgeklärt werden.

Nach dem Begriffe sind zusammenlaufende Ebenen jene, welche, entweder wirklich oder gehörig verlängert, einander durchschneiden; auseinanderlaufende aber solche, welche bei ihrer Verlängerung sich immer mehr von einander entfernen. Da der Durchschnitt zweier Ebenen hier schon evident

nachzuweisen ist, so sind auch diese Erklärungen als Sacherklärungen zu betrachten; so wie es überhaupt klar ist, daß zwei Ebenen, welche nach einer Seite hin zusammenlaufen, nach der entgegengesetzten auseinanderlaufende seyn müssen.

III. Gleichwie sich bei zwei Parallellinien, welche von einer dritten geschnitten werden, verschiedene Nebenwinkel und Scheitelwinkel bilden, so entstehen auch dergleichen Winkel aus dem Durchschnitte zweier Ebenen. Wenn eine geradlinig begränzte Ebene auf eine andere lothrecht gestellt wird, so bildet sie mit ihr zwei Neigungswinkel, deren jeder hier ein rechter ist, und welche zusammengenommen als Nebenwinkel an Ebenen zu betrachten sind. Wird dagegen diese Ebene schief auf die andere gestellt, so entsteht auf der einen Seite ein spitzer, auf der andern aber ein stumpfer Neigungswinkel, welche ebenfalls als Nebenwinkel anzusehen sind.

Denkt man sich eine Ebene, welche mitten auf einer andern schief steht, unterhalb dieser zweiten nach Belieben verlängert, so entstehen auf entgegengesetzten Seiten der gemeinsamen Durchschnittslinie beider Ebenen zwei Paare von Winkeln, wovon jeder seinem gegenüberstehenden gleich ist, und welche als Scheitelwinkel an Ebenen zu betrachten sind. Auch erkennt man sogleich aus der Anschauung, daß jeder dieser vier Winkel ein rechter seyn kann.

Hieraus folgt, daß man unter Nebenwinkeln an Ebenen jene zwei Neigungswinkel versteht, welche entstehen, wenn eine Ebene auf einer anderen nach irgend einer Lage aufgestellt wird.

Wenn aber zwei Ebenen einander dergestalt durchschneiden, daß von jeder ein Theil auf entgegengesetzten Seiten der andern liegt, so entstehen die einander entgegenstehenden Scheitelwinkel an Ebenen.

Man erkennt, daß diese Erklärungen wahre Sacherklärungen sind, weil die Entstehung solcher Winkel schon durch sich selbst verständlich ist.

Ueberhaupt ist einleuchtend, daß die hier erklärten Winkel mit den Neben- und Scheitelwinkeln an geraden Linien große Aehnlichkeit haben. Wenn einer von ihnen ein spitzer ist, so muß sein Scheitelwinkel ein gleicher spitzer; sein Nebenwinkel aber ein stumpfer seyn.

IV. Auf ähnliche Weise werden auch jene Winkel durch die Anschauung aufgeklärt, welche entstehen, wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten werden, und man kann durch eine einfache Vorrichtung diese Winkel bequem darstellen.

Hierauf gründen sich folgende Erklärungen. Die zwei inneren entgegengesetzten Winkel werden jene genennt, welche auf der nämlichen Seite der Durchschnittsebene und zwischen den beiden geschnittenen Ebenen liegen. Daß es zwei Paare von ihnen gibt, folgt sogleich daraus, daß die Durchschnittsebene zwei verschiedene Seiten hat.

Unter den äusseren und inneren Winkeln versteht man jene, welche zwar auf einerlei Seite der schneidenden Ebene liegen; deren einer sich aber zwischen den geschnittenen Ebenen (der innere), der andere dagegen ihm gleiche (der äussere) sich

ausserhalb derselben befindet. Von diesen Winkeln lassen sich leicht die vier verschiedenen Paare auffinden.

Wechselwinkel werden hier jene genennt, welche auf entgegengesetzten Seiten der Durchschnittsebene und so liegen, daß sich der eine zwischen den zwei Parallelebenen auf einer Seite; der andere aber, ihm gleiche, zwischen eben diesen Ebenen auf der entgegengesetzten Seite befindet.

Von diesen Wechselwinkeln gibt es zwei verschiedene Paare.

Es ist klar, daß diese Erklärungen als genetische nur in sofern zu betrachten sind, als man die Construction zweier Parallelebenen bei ihnen voraussetzt, ohne welche sie als bloße Worterklärungen erscheinen.

§. 2.

Körperwinkel und ihre Arten.

I. Sowie in der Planimetrie der ebene Winkel vorkömmt, so macht der Körperwinkel einen wichtigen Gegenstand der stereometrischen Betrachtung aus. Der einfachste aller Körperwinkel ist jener, welcher von drei Seitenebenen gebildet wird. Seine Entstehung läßt sich auf folgende Art nachweisen und durch ein gehörig zubereitetes Stück steifen Papieres leicht versinnlichen.

Man denke sich irgend ein ebenes Dreieck, nehme in seiner Fläche einen beliebigen Punct, stelle durch ihn eine gerade Linie lothrecht oder schief auf die Dreiecksebene, und denke sich von ihrem oberen Endpuncte drei gerade Linien nach den drei Scheitel-

punkten des Dreiecks, so entsteht an diesem oberen Puncte der aufgestellten Linie ein von drei Seitenebenen gebildeter Körperwinkel. Richtet man auf ein ebenes Brettchen ein dünnes Stäbchen nach irgend einer Lage auf, und verbindet sein oberes Ende durch drei Fäden mit den drei Winkelpuncten eines in dieser Ebene gezeichneten Dreiecks, so stellt man der wirklichen Anschauung diesen dreikantigen Körperwinkel dar, an welchem folgendes zu bemerken ist.

Dieser Körperwinkel wird von drei Seitenwinkeln gebildet, welche man auch seine Seitenflächen zu nennen pflegt.

Man erkennt an demselben drei gerade Linien, wovon je zwei einen dieser Seitenwinkel bilden. Man nennt sie die Seitenlinien oder Seitenkanten und daher auch den hier gebildeten Körperwinkel einen dreikantigen.

Da die drei Seitenwinkel einen gemeinschaftlichen Scheitelpunct haben, so wird dieser auch der Scheitelpunct des Körperwinkels genennt.

Auch ist klar, daß der Körperwinkel nach diesem Scheitelpuncte hin begränzt ist, und somit einen körperlichen Raum einschließt; so wie aber auch, daß derselbe nach der entgegengesetzten Richtung hin unbegränzt am Körperraume ist, und immer einen größeren Raum zwischen sich faßt, je weiter seine Seitenkanten verlängert werden. Hierin stimmt der Körperwinkel mit dem ebenen Winkel vollkommen überein und beide begränzen ihren Raum nicht allseitig, sondern nur nach einer Richtung hin. Gleich-

wie die Schenkel des ebenen Winkels ohne Ende verlängert werden können, so kann man sich auch die Seitenebenen des Körperwinkels in's Unendliche erweitert vorstellen. So wenig aber die Größe des ebenen Winkels durch die Länge seiner Schenkel bestimmt wird, so wenig ist dieses auch bei dem körperlichen Winkel der Fall.

Je zwei seiner drei Seitenebenen haben eine bestimmte Neigung gegen einander; so, daß ihr Neigungswinkel ein rechter, spitzer oder stumpfer seyn kann.

Auch ist klar, daß man den körperlichen Winkel, so wie den ebenen, theils als einen hohlen, theils auch als einen erhabenen betrachten kann, je nachdem man ihn von Innen oder von Aussen betrachtet. Als erhabener Winkel, oder als körperliche Ecke, wird er am gewöhnlichsten betrachtet.

II. So wie der dreikantige Körperwinkel der Anschauung sehr einfach gegeben wird, so leicht ist es auch, einen vierkantigen Körperwinkel darzustellen. Wenn man irgend ein geradliniges Viereck auf einer Ebene verzeichnet, ausserhalb derselben einen willkührlichen Punct nimmt und von ihm nach jedem Winkelpuncte des Vierecks eine gerade Linie zieht, so entsteht an dem gewählten Puncte ein Körperwinkel von vier Seitenwinkeln gebildet, an welchem ebenfalls der Scheitelpunct, jede der vier Seitenkanten, der zum Theil begrenzte Körperraum u. s. w. betrachtet werden kann.

Wenn man vier gerade Drathstücke aus einem gemeinsamen Verbindungspuncte so ausgehen läßt,

daß keine drei von ihnen in einerlei Ebene liegen, so hat man ebenfalls das sinnliche Bild eines vierkantigen Körperwinkels.

Nähme man in der Ebene irgend ein Fünfeck, ausserhalb desselben einen willkührlichen Punct, welcher mit jedem Scheitelpuncte des Fünfecks durch eine gerade Linie verbunden würde, so entstände auf ähnliche Weise ein fünfkantiger Körperwinkel, an welchem wieder der Scheitelpunct, die Seitenkanten u. s. f. betrachtet werden könnten. Wenn aus einem gemeinschaftlichen Puncte fünf geradgebogene Drathstücke nach fünf verschiedenen Richtungen so ausliefen, daß keine drei derselben in der nämlichen Ebene lägen, so würde ebenfalls ein fünfkantiger Körperwinkel gebildet. Auf gleiche Weise könnte derselbe durch ein gehörig gebogenes Stück steifen Papieres zur Anschauung gebracht werden.

III. Hieraus ist überhaupt klar, wie vielkantige Körperwinkel, d. h. solche entstehen kőnen, welche mehr als fünf Seitenkanten haben. Nimmt man z. B. ausserhalb der Ebene eines Zehnecks einen Punct, welcher mit jedem der zehn Scheitelpuncte jenes Polygons verbunden wird, so entsteht ein zehnkantiger Körperwinkel, und ganz auf ähnliche Weise können andere von noch größerer Zahl der Seitenkanten gebildet werden.

Da die Entstehung dieser sämmlichen Körperwinkel hier schon, ohne Hülfssätze der eigentlichen stereometrischen Wissenschaft, befriedigend erkannt wird, so können die gegebenen Erklärungen als genetische betrachtet werden.

Im allgemeinen kann man sagen: ein Körperwinkel entsteht, wenn mehr als zwei ebene Winkel mit ihrem gemeinschaftlichen Scheitelpuncte und mit je zwei ihrer Schenkel so verbunden werden, daß sie alle zusammen nicht in eine einzige Ebene fallen, sondern zusammengenommen weniger als vier rechte Winkel betragen. Warum dieses letztere bei jedem, auch noch soviel kantigen Körperwinkel statt finden müsse, wird weiter unten überzeugend bewiesen, obwohl es auch hier schon durch die Anschauung erkannt wird.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Wie wird der Parallelismus zweier Ebenen durch die Anschauung dargestellt? Wann sind solche Ebenen dem Begriffe nach gleichlaufend? Von welcher Art sind diese Erklärungen? Was sind zusammenlaufende und auseinanderlaufende Ebenen? Wie können sie durch die Anschauung erläutert werden? Von welcher Art sind diese Erklärungen? Wie entstehen Nebenwinkel und Scheitelwinkel an Ebenen? Wie kann man dieselben erklären? Mit welchen Winkeln in der Planimetrie haben sie große Aehnlichkeit? Wie entstehen bei zwei Ebenen, die von einer dritten geschnitten werden, die zwei innern Winkel, der äussere und sein innerer, die beiden Wechselwinkel? An welche Winkel der Planimetrie erinnern sie? Sind dieses Sach- oder Wort-Erklärungen? (§. 1.)

II. Wie entsteht ein dreieckiger oder dreikantiger Körperwinkel? Was sind seine Seitenflächen, Seitenkanten? Was ist sein Scheitelpunct? Was ist der innere und äussere Körperwinkel? Ist derselbe ein geometrischer Körper? Wie entsteht der viereckige Körperwinkel; wie der fünfeckige und überhaupt der viel-

kantige? Was zeigt die unmittelbare Anschauung an denselben? Sind diese Erklärungen Sach- oder Wort-Erklärungen? Wovon hängt die Größe eines Körperwinkels ab? Was hat er mit dem ebenen Winkel gemein? (§. 2.)

Zweiter Lehrgang.

Grundanschauungen und Erklärungen von Körpern.

I. Lehrübung.

Prismatische Körper.

§. 1.

Eckige prismatische Körper.

I. Die Entstehung jenes Körpers, welchen man ein senkrechtes dreieckiges Prisma nennt, läßt sich auf folgende Weise darstellen. Man denke sich ein beliebiges Dreieck und aus einem seiner Winkelpuncte eine willkührlich große, auf seiner Ebene senkrecht stehende Linie errichtet. Nimmt man nun an, dieses Dreieck bewege sich, mit Beibehaltung seiner parallelen Lage, sowohl in Bezug auf seine Ebene als auf seine Seitenlinien, an dieser geraden Linie hinauf, so entsteht hierdurch ein begränzter körperlicher Raum, welcher das senkrechte dreieckige Prisma heißt. Auch kann ein aus Holz oder aus Pappe, oder einer andern Materie verfertigtes Modell sehr einfach zur Versinnlichung dienen.

An diesem Körper bemerkt man seine Grundfläche, d. h. jenes Dreieck, aus dessen Bewegung der Körper entstanden ist.

Dieser Grundfläche entgegen steht seine Oberfläche, welche mit ihr gleichlaufend und derselben congruent ist. Man kann aber auch die Oberfläche als Grundfläche, und letztere wieder als Oberfläche betrachten.

Auf der Seite ist dieser Körper von drei Rechtecken begränzt, welche man seine Seitenflächen nennt, und seine Gesammtoberfläche besteht aus der Summe dieser drei Seitenebenen und der beiden Grundflächen.

Da wo je zwei dieser Seitenflächen sich durchschneiden, befindet sich als Durchschnittslinie eine Seitenkante, deren das dreiseitige Prisma drei verschiedene und hier einander gleiche darstellt.

Jede dieser Seitenkanten steht sowohl auf der Grundfläche, als auf der Oberfläche des Körpers lothrecht und jede ist mit jeder der zwei andern gleichlaufend.

Ferner hat dieser Körper sechs Scheitelpuncte, an welchen sich sechs Körperwinkel befinden, deren jeder von drei Seitenwinkeln begränzt wird. Auch lehrt die Anschauung, daß je zwei dieser sechs Körperwinkel durchaus dieselbigen sind.

Ueberhaupt befinden sich rings um den ganzen Körper her achtzehn ebene Winkel, wovon man jene, welche einander gleich sind, leicht auffinden kann.

Der ganze Körper hat neun Umfangslinien, wovon die drei Seitenkanten unter sich gleich sind, jede Umfangslinie der Grund- und Oberfläche aber einer ihr gegenüberliegenden gleich ist.

Je zwei dieser Seitenflächen bilden an der gemeinsamen Seitenkante einen Neigungswinkel, welchen man den Kantenwinkel nennen kann, und dessen Größe sowohl am Anfange, als am Ende jeder Seitenkante der Anschauung erscheint.

Auch steht jede der drei Seitenflächen sowohl auf der Grundfläche, als auf der Oberfläche lothrecht.

Jede Seitenlinie dieser Grund- und Oberfläche steht aber auf der daranstoßenden Seitenfläche gewöhnlich schief, kann aber auch auf einer lothrecht seyn.

Das senkrechte dreieckige Prisma ist daher jener Körper, welcher von einem Dreiecke als Grundfläche, von einem ihm congruenten und parallelen Dreiecke als Oberfläche, und von drei Rechtecken als Seitenflächen umschlossen ist, deren jedes sowohl auf der Grnndfläche als auf der Oberfläche lothrecht steht.

Diese Erklärung kann nur als Worterklärung gelten, weil die wissenschaftliche Entstehung des senkrechten dreieckigen Prisma erst überzeugend nachzuweisen ist.

Man heißt diesen Körper senkrecht, weil jede Seitenkante auf seiner Grund- und Oberfläche lothrecht steht.

Unter einem stereometrischen Körper überhaupt versteht man einen allseitig begränzten körperlichen Raum, und es ist klar, daß der Körperwinkel kein stereometrischer Körper sei, weil sein Raum nach einer Seite hin unbegränzt ist.

II. Dem senkrechten dreieckigen Prisma steht das schiefe dreieckige Prisma entgegen. Man ver-

steht darunter jenen Körper, welcher von zwei parallelen, einander congruenten Dreiecken und von drei Parallelogrammen als Seitenflächen dergestalt umschlossen ist, daß diese letztere sowohl auf der Grund- als Oberfläche schief stehen. Daß auch diese Erklärung nur eine Worterklärung sei, versteht sich von selbst, obwohl man sich die Entstehung dieses Körpers dadurch versinnlichen kann, daß man auf ein Dreieck aus einem seiner Winkelpuncte eine schiefstehende Linie errichtet und dieses Dreieck sich in paralleler unveränderter Lage an derselben hinauf bewegen läßt. Auch kann dieses Prisma gleich dem vorigen sehr leicht im Modelle dargestellt werden.

Die Anschauung erkennt im Allgemeinen sogleich seine Grundfläche, seine Oberfläche, jede der drei Seitenflächen, seine drei Seitenkanten, jeden der sechs Körperwinkel und den ganzen körperlichen Raum.

Die Grundfläche ist der Oberfläche congruent und mit ihr gleichlaufend, jede der drei Seitenkanten ist der andern gleich, steht aber schief sowohl auf der Grundfläche als auf der Oberfläche.

Unter den drei Seitenflächen sind wenigstens zwei schiefwinkelige Parallelogramme, die dritte ist entweder ein Rechteck oder auch schiefwinkelig. Auch steht jede dieser Seitenflächen schief auf der Grund- und Oberfläche.

Die Gesammtfläche dieses Körpers wird von drei Parallelogrammen und von zwei congruenten Dreiecken gebildet; dagegen hat derselbe neun verschiedene Gränzlinien, unter welchen drei Paare

unter sich, so wie auch die drei übrigen einander gleich sind.

Auch bilden je zwei seiner Seitenflächen an ihrer Durchschnittskante einen Winkel, welcher bei zweien ein spitzer seyn muß, und bei dem dritten Paare ein rechter, spitzer oder stumpfer seyn kann.

Wenn man das Gemeinschaftliche vom senkrechten und schiefen dreieckigen Prisma zusammenfaßt, so entsteht der Begriff vom dreieckigen Prisma überhaupt, welches ein Körper ist, dessen Grund- und Oberflächen zwei congruente parallele Dreiecke und dessen Seitenflächen drei Parallelogramme sind.

III. Wenn man aus dem Winkelpuncte eines Parallelogramms auf seine Ebene ein Loth errichtet, und nunmehr annimmt, daß sich dieses Parallelogramm in paralleler, sich immer gleichbleibender Lage an demselben hinauf bewegt, so entsteht das senkrechte Parallelopipedum als Resultat dieser Bewegung. Auch ist es leicht, diesen Körper in einem Modelle von Holz oder dergleichen sinnlich darzustellen.

Die unmittelbare Anschauung desselben erkennt ein Parallelogramm als Grundfläche und ein ihm vollkommen congruentes und paralleles Parallelogramm als Oberfläche.

Ferner die vier Seitenflächen, deren jede ein Rechteck und ihrer gegenüberstehenden congruent ist, mit welcher sie auch parallel läuft.

Daher ist das ganze Parallelopipedum von sechs Parallelogrammen eingeschlossen, wovon je zwei gegenüberliegende mit einander congruent und paral-

lel sind. Auch ist klar, daß jede der vier Seitenflächen dieses Körpers als Grundfläche betrachtet werden kann, wenn man ihn auf dieselbe stellt, wodurch denn die vorige Grund- und Oberflächen nunmehr zu Seitenflächen werden.

An diesem Körper erkennt man vier Seitenkanten von gleicher Größe, welche alle einander gleichlaufend sind, und deren jede sowohl auf der Grund- als Oberfläche lothrecht steht.

Desgleichen erblickt man an ihm acht Körperwinkel, wovon vier an den Winkelpuncten der Grundfläche, die vier andern an jener der Oberfläche liegen, und deren jeder von drei rechten Winkeln gebildet wird.

Auch ist jeder der vier Kantenwinkel ein rechter, und die Zahl der sämmtlichen Seitenlinien ist zwölf, wovon vier unter sich, die übrigen acht aber einander paarweise gleich sind.

Daher muß man zur Erklärung des senkrechten Parallelopipedums, welche hier nur eine Worterklärung ist, sagen, es sei ein solcher Körper, welcher von acht Parallelogrammen, deren zwei gegenüberstehende parallel und congruent sind, so umschlossen ist, daß sämmtliche Seitenkanten auf den an ihren Enden liegenden Ebenen senkrecht stehen. Die wissenschaftliche Entstehung dieses Körpers bleibt den Sätzen der Stereometrie vorbehalten.

Wäre die Grundfläche des senkrechten Parallelopipedums ein Rechteck, so würde dieser Körper ringsumher von acht Rechtecken begränzt, und man sieht deutlich, daß diese Grundfläche auf ein Quadrat oder

irgend eine Rhomboide seyn kann. Man erkennt ihn sogleich daran, daß seine Seitenkanten auf dem Parallelogramme der Grund- und Oberfläche senkrecht stehen.

IV. Ganz auf ähnliche Weise kann man sich die Entstehung des schiefen Parallelopipedums darstellen. Es sei irgend ein Parallelogramm gegeben, man errichte aus einem Winkelpuncte eine willkührlich lange, auf seiner Ebene schiefstehende Linie und lasse nun dieses Parallelogramm sich in paralleler, immer unveränderter Lage an derselben hinauf bewegen, so wird der hierdurch entstandene Körper ein schiefes Parallelopipedum seyn. Auch läßt sich dieser Körper sehr einfach aus irgend einer körperlichen Materie, z. B. aus Holz, oder aus Pappe darstellen.

Die Anschauung erkennt sogleich an ihm sowohl seine Grundfläche, als seine Oberfläche, deren jede mit der andern parallel und ihr congruent ist.

Auch erblickt man seine vier Seitenflächen, wovon die zwei gegenüberstehenden ebenfalls miteinander gleichlaufend und parallel sind. Gewöhnlich bestehen sie aus schiefen Parallelogrammen; doch können auch zwei Rechtecke dabei seyn.

Daher wird der ganze Körper von sechs Parallelogrammen umschlossen, wovon je zwei gegenüberliegende mit einander gleichlaufend und congruent sind. Auch kann jede dieser Seitenflächen als Grund- oder als Oberfläche betrachtet werden.

Ferner hat dieser Körper vier gleiche, mit einander parallel laufende Seitenkanten, welche sowohl auf der Grundfläche, als auf der Oberfläche schief stehen.

Von den acht Körperwinkeln befinden sich vier an der Oberfläche und vier an der Grundfläche, und jeder von ihnen wird aus drei ebenen Winkeln gebildet.

Auch lassen sich die vier Kantenwinkel betrachten, so wie auch die Neigungen der Grund- und Oberfläche gegen jede der vier Seitenflächen.

Die Erklärung des schiefen Parallelopipedums ist demnach folgende. Es ist jener Körperraum, welcher von zwei congruenten, unter sich gleichlaufenden Parallelogrammen als Grund- und Oberfläche, und von vier Seitenparallelogrammen, deren zwei gegenüberliegende parallel und congruent sind, dergestalt umschlossen wird, daß jede der vier Seitenkanten mit der Grund- und Oberfläche schiefe Winkel bildet. Man sieht hieraus, daß diese Erklärung eine bloße Worterklärung sei, deren Begriff durch die Sätze der eigentlichen Wissenschaft erst nachgewiesen werden muß.

Daß die Grundfläche eines schiefen Parallelopipedums auch ein Rechteck oder ein Quadrat seyn kann, wird man von selbst erkennen.

Auch entsteht aus der Vergleichung des senkrechten und schiefen Parallelopipedums der Begriff vom Parallelopipedum überhaupt, als desjenigen Körpers, welcher von sechs Parallelogrammen umschlossen wird, deren zwei gegenüberliegende unter sich parallel und congruent sind. Dieß ist ebenfalls nur eine Worterklärung.

V. Eine allgemeinere Art von Körpern bildet das senkrechte viereckige Prisma, dessen Entsteh-

ung dadurch versinnlicht werden kann, daß man sich irgend ein Viereck vorstellt, aus einem seiner Winkelpuncte eine gerade Linie von beliebiger Größe auf dessen Ebene senkrecht errichtet denkt und nun annimmt, das Viereck bewege sich in paralleler und unverrückter Lage an diesem Lothe hinauf.

Auch hier ist es leicht, diesen Körper in irgend einem Modelle anschaulich zu machen, und man erkennt sodann seine Grund- und Oberfläche, welche parallel und congruent, aber keine Parallelogramme sind. Man erblickt seine vier Seitenflächen, welche Rechtecke sind, aber nicht immer gegenüberliegend parallel oder congruent. Es können nämlich drei dieser Seitenflächen einander congruent seyn, wo denn die zwei gegenüberliegenden nicht gleichlaufend sind. Auch können nur zwei anliegende congruent seyn. Endlich können auch zwei gegenüberliegende einander gleichlaufend aber nicht congruent seyn. Die wirkliche Anschauung der nach diesen Bestimmungen geformten Modelle erläutert dieses.

Die vier Seitenkanten sind hier sowohl unter sich gleich, als parallel und lothrecht stehend auf Grund- und Oberfläche.

Jeder der acht Körperwinkel, deren vier an der Oberfläche und vier an der Grundfläche liegen, ist von drei Seitenwinkeln gebildet.

Ausserdem kann man die vier Kantenwinkel betrachten, worunter einige theils rechte, theils spitze und stumpfe Winkel seyn können.

Es ist demnach ein senkrechtes viereckiges Prisma jener Körper, welcher ein Viereck zur

Grundfläche, ein ihm paralleles, congruentes Viereck zur Oberfläche und vier Rechtecke zu Seitenflächen hat, deren jedes, gleich den vier Seitenkanten, auf der Grund- und Oberfläche lothrecht steht. Diese Erklärung ist ebenfalls nur eine Worterklärung.

Man sieht übrigens, daß ein senkrechtes viereckiges Prisma nur darin vom senkrechten Parallelopipedum verschieden ist, daß jenes irgend ein Viereck, dieses aber ein Parallelogramm zur Grundfläche hat. Auch ist klar, daß das senkrechte Parallelopipedum als besondere Art der senkrechten viereckigen Prismen zu betrachten ist und daß man sagen kann, das senkrechte Parallelopipedum ist ein senkrechtes viereckiges Prisma, dessen Grundfläche von irgend einem Parallelogramme gebildet wird.

VI. Dem senkrechten viereckigen Prisma zur Seite steht das schiefe viereckige Prisma, dessen Entstehung dadurch versinnlicht wird, daß man auf die Ebene irgend eines Viereckes eine schiefstehende Linie errichtet, und dieses Viereck nun sich in paralleler, nicht veränderter Lage an derselben hinauf bewegen läßt. Auch kann dieser Körper leicht in einem Modelle dargestellt werden.

Die Anschauung erblickt an ihm, daß die vier Seitenkanten, unter sich gleich und parallel, in schiefer Lage auf der Grund- und Oberfläche stehen, daß die vier Seitenflächen zwar Parallelogramme, jedoch nicht alle Rechtecke sind. Es können nämlich zwei gegenüberliegende Seitenflächen als Rechtecke erscheinen; dann sind aber die zwei andern schiefe Parallelogramme.

Die Anschauung der acht Körperwinkel u. s. w. hat dieser Körper mit dem vorhergehenden gemein.

Es ist daher das schiefe viereckige Prisma ein Körper, welcher von einem Vierecke als Grundfläche, von einem ihm gleichlaufenden, congruenten Vierecke als Oberfläche und von vier Seitenparallelogrammen so eingeschlossen ist, daß die vier Seitenkanten schief auf der Grund- und Oberfläche stehen. Diese Erklärung ist aber wieder eine bloße Worterklärung.

Das schiefe Parallelopipedum ist daher von dem schiefen vierkantigen Prisma nur darin verschieden, daß die Grundfläche des letztern irgend ein Viereck, und jene des erstern ein Parallelogramm ist.

Auch muß das schiefe Parallelopipedum als eine besondere Art der schiefen viereckigen Prismen betrachtet werden, und man kann sagen, das schiefe Parallelopipedum sei ein schiefes viereckiges Prisma, dessen Grundfläche ein Parallelogramm ist.

Daher ist das viereckige Prisma überhaupt jener Körper, dessen Grund- und Oberflächen gleichlaufende congruente Vierecke und dessen vier Seitenflächen Parallelogramme sind. Hieraus ist klar, daß unter diesem Begriffe des viereckigen Prisma sowohl die senkrechten als schiefen Parallelopipeden enthalten sind.

VII. Wenn man sich irgend ein geradliniges Fünfeck als Grundfläche denkt, aus einem Winkelpuncte ein willkührliches Loth auf dasselbe errichtet und dieses Fünfeck in paralleler unveränderter Lage sich an diesem Lothe hinaufbewegen läßt, so entsteht ein senkrechtes fünfeckiges Prisma, dessen

Anschauung ebenfalls durch ein Modell leicht versinnlicht werden kann.

Stellte man die gerade Linie schief auf die Ebene des Fünfeckes, so entstände durch dessen Bewegung ein schiefes fünfeckiges Prisma, was ebenfalls im Modelle leicht dargestellt werden kann.

Hieraus folgt, daß das fünfeckige Prisma überhaupt jener Körper ist, welcher von einem Fünfecke als Grundfläche, von einem ihm congruenten Fünfecke als Oberfläche und von fünf Seitenparallelogrammen als Seitenflächen eingeschlossen wird.

Daß diese Erklärung eine bloße Worterklärung sei, bedarf keiner weitern Erinnerung.

Ueberhaupt erkennt man nunmehr, wie das sechsseitige, siebenseitige und im Allgemeinen das n seitige Prisma durch die Bewegung eines Sechseckes, oder Siebeneckes oder eines n Eckes anschaulich werden kann.

Hieraus entspringt der Begriff von dem eckigen Prisma überhaupt. Es ist nämlich ein vieleckig prismatischer Körper derjenige, welcher von einem Vielecke als Grundfläche, von einem ihm parallelen und congruenten Vielecke als Oberfläche und von so vielen Parallelogrammen als Seitenflächen umschlossen wird, als wie viele Seiten dessen Grundfläche hat.

Stehen die Seitenkanten lothrecht auf der Grund- und Oberfläche, so wird das Prisma ein senkrechtes; haben sie aber eine schiefe Lage gegen dieselbe, so muß das Prisma ein schiefes seyn.

Diese Erklärung vom vieleckigen prismatischen Körper überhaupt muß ebenfalls erst durch die wissenschaftlichen Lehrsätze gehörig begründet werden.

§. 2.

Runde prismatische Körper.

I. Den eckigen prismatischen Körpern stehen die runden zur Seite und der senkrechte Cylinder gehört vor allen hierher, dessen Entstehung auf folgende Art anschaulich nachgewiesen werden kann.

Man errichte aus dem Mittelpuncte eines Kreises auf dessen Ebene ein willkührliches Loth und nehme an, der Kreis bewege sich, in paralleler Lage, mit seinem Mittelpuncte an dieser Linie nach oben, so entsteht ein Körper, welcher eben dieser senkrechte Cylinder ist und sehr leicht durch ein Modell von irgend einer körperlichen Materie dargestellt werden kann.

Die Anschauung dieses Körpers zeigt einen Kreis als Grundfläche, und einen ihm congruenten, parallelen Kreis als Oberfläche.

Auch erblickt man eine krumme Seitenfläche, welche den körperlichen Raum von der Seite her einschließet, und eine Fläche von einfacher Krümmung ist.

Desgleichen nimmt man den körperlichen Raum wahr, welcher von den zwei Kreisebenen und von der krummen Seitenfläche eingeschlossen wird. Zusammengenommen bilden sie seine Gesammtoberfläche.

Auch kann man sich eine gerade Linie denken, welche den Mittelpunct der Grundfläche mit jenem der Oberfläche verbindet, und die Achse des Cylinders heißt. Sie steht bei dem hier entstandenen Cylinder auf seiner Grund- und Oberfläche senkrecht, weshalb derselbe auch ein senkrechter Cylinder genennt wird.

Wenn man sich eine Ebene vorstellt, welche diesen senkrechten Cylinder durch seine Achse in zwei Hälften theilt, so wird auch seine krumme Oberfläche hierdurch halbirt, und die Gränzen dieser Hälften sind zwei gerade einander gleiche Linien, deren jede die Seite des Cylinders heißt, und sowohl auf der Grund- als Oberfläche lothrecht steht.

Es ist demnach der senkrechte Cylinder jener Körper, welcher von zwei gleichlaufenden, congruenten Kreisflächen und von einer einfach gekrümmten, in sich selbst zurücklaufenden Seitenfläche dergestalt umschlossen ist, daß seine Achse auf der Grund- und Oberfläche lothrecht steht. Diese Erklärung ist wieder keine Sacherklärung. Doch könnte man auch hier schon den senkrechten Cylinder dadurch auf faßliche Art entstehen lassen, daß man sich ein Rechteck vorstellt, welches um eine seiner Seiten, als feststehende Achse, so lange herumbewegt wird, bis es wiederum in seine erste Lage zurückkehrt. Hier bildet die feststehende Seite des Rechtecks die Achse des Cylinders, seine gegenüberstehende Seite beschreibt die krumme Seitenfläche desselben, und jede der zwei andern Seiten ist der Radius eines Kreises, welcher die Grund- und Oberfläche des Körpers bildet.

II. Auf ähnliche Weise gibt es auch einen schiefen Cylinder, dessen Entstehung dadurch anschaulich wird, daß man aus dem Mittelpuncte eines Kreises eine schiefe Linie auf seine Ebene errichtet, und diesen Kreis nun auf die gewöhnliche Weise an derselben sich hinauf bewegen läßt.

Auch hier kann bequem ein Modell zur Anschauung dieses Körpers dienen.

Er zeigt sodann sowohl die kreisförmige Grund- als Oberfläche, sodann seine einfach gekrümmte, in sich selbst zurücklaufende Seitenfläche, und den schiefen Stand des ganzen Körpers in Bezug auf seine Grundfläche.

Denkt man sich auch hier eine gerade Linie, welche die Mittelpuncte beider Kreise verbindet, so ist dieses die Achse des schiefen Cylinders, welche schief auf der Grund- und Oberfläche stehet.

Würde dieser Cylinder mit einer Ebene längs seiner Achse geschnitten, so entständen auf seiner krummen Seitenfläche, wie bei dem senkrechten Cylinder, zwei gerade Linien, welche seine Seitenlinien heißen, und ebenfalls auf der Grund- und Oberfläche schief stehen.

Der schiefe Cylinder ist daher jener Körper, welcher von zwei gleichlaufenden, congruenten Kreisflächen in Verbindung mit einer einfach gekrümmten Seitenfläche dergestalt eingeschlossen ist, daß seine Achse mit der Grund- und Oberfläche schiefe Winkel bildet.

Diese Erklärung kann ebenfalls keine Sacherklärung seyn; auch läßt sich die Entstehung des schiefen

Cylinders nicht durch Umdrehung eines schiefen Parallelogrammes um eine seiner Seitenlinien erklären, denn man sieht, daß aus dem Durchschnitte einer Ebene längs seiner Achse jedesmal ein anderes Parallelogramm entsteht, je nachdem die Richtung des Schnittes eine andere ist. Daß einer dieser Durchschnitte ein Rechteck gibt, wird man ebenfalls durch die Anschauung erkennen.

Der Cylinder überhaupt wäre demnach ein Körper, welcher von zwei parallelen congruenten Kreisen und von einer krummen, in sich selbst zurücklaufenden Seitenfläche von einfacher Krümmung eingeschlossen ist.

III. Auf ähnliche Weise kann man die Entstehung anderer rundlicher, cylinderähnlicher Körper anschaulich machen. Man denke sich z. B. eine ebene, von irgend einer unregelmäßigen, in sich selbst zurücklaufenden krummen Linie begränzte Figur als Grundfläche, nehme in ihr einen beliebigen Punct, errichte aus ihm irgend eine gerade Linie über dieselbe und nehme nun an, jene Grundfläche bewege sich auf bekannte Weise an dieser Linie empor, so entsteht ein solcher rundlicher, cylinderähnlicher Körper.

Wäre die gewählte Grundfläche theils von geraden, theils von krummen Linien begränzt, und man dächte sich ihre Bewegung auf ähnliche Art, so entstände ein Körper, welcher mit den eckigen und mit den cylindrischen etwas gemeinschaftlich hätte. Man sieht überhaupt hieraus, wie höchst mannigfaltig die prismatischen Körper gebildet werden können.

§. 3.

Uebungsfragen.

I. Wie entsteht das senkrechte dreieckige Prisma? Welche räumliche Gegenstände erkennt die Anschauung an demselben? Erklärung dieses Körpers? Ist sie ein Sach- oder Wort-Erklärung? Anschauliche Entstehung des schiefen dreieckigen Prismas? Was erkennt man an diesem Körper? Begriff desselben? Was hat das senkrechte Prisma mit dem schiefen gemein, und wodurch unterscheiden sie sich? Was ist das dreieckige Prisma überhaupt? Wie ensteht das senkrechte und schiefe Parallelopipedum? Was erkennt die Anschauung an denselben? Wie werden beide Körper erklärt? Was haben sie Gemeinschaftliches und Unterscheidendes? Verschiedenheit des Parallelopipedums nach Verschiedenheit seiner Grundfläche? Was ist das viereckige senkrechte oder schiefe Prisma überhaupt? Was ist ein senkrechtes oder schiefes fünfeckiges Prisma? Wie entsteht es, was erkennt die Anschauung daran? Was ist das Prisma überhaupt? (§. 1.)

II. Wie entsteht der senkrechte Cylinder? Was erkennt die Anschauung daran? Was ist seine Achse und seine Seite? Wie entsteht derselbe aus einem Rechtecke? Was ist der senkrechte Cylinder? — Wie entsteht der schiefe Cylinder? Was erkennt die Anschauung an ihm? Was ist derselbe? Was hat der senkrechte Cylinder mit dem schiefen Gemeinschaftliches, und Unterscheidendes von ihm? Was ist der Cylinder überhaupt? Sind Cylinder als prismatische Körper zu betrachten? Was sind cylinderähnliche Körper? Wie vielerlei können sie seyn? (§. 2.)

II. Lehrübung.

Pyramidalische Körper.

§. 1.

Eckige pyramidalische Körper.

I. Die einfachste aller Pyramiden ist die senkrechte dreieckige, deren Entstehung auf folgende Weise anschaulich wird. Aus der Mitte eines gleichseitigen Dreiecks erhebe sich ein Loth von willkührlicher Größe, und von dessen Endpunct seien drei gerade Linien nach den drei Winkelpuncten des Dreiecks gezogen, so entstehen vier Dreiecke, welche den körperlichen Raum dieser Pyramide umgränzen.

Die wirkliche Anschauung eines aus irgend einer festen Materie verfertigten Modells dieses Körpers zeigt das gleichseitige Dreieck als Grundfläche dieses Körpers nebst jenen drei gleichschenkeligen Dreiecken, welche unter sich congruent sind und zusammen die Seitenfläche der Pyramide bilden. Jedes einzelne dieser Dreiecke wird ein Seitendreieck des Körpers genennt.

Gegen der Grundfläche über liegt ein Körperwinkel, dessen Scheitel die Spitze der Pyramide bildet.

Von den drei Seitenkanten, welche als Durchschnittslinien je zweier Seitenflächen zu betrachten sind, ist jede der andern gleich.

Eine gerade Linie aus dem Mittelpuncte der Grundfläche zur Spitze der Pyramide stellt ihre

Achse vor, welche lothrecht auf der Grundfläche steht.

Auch erblickt man vier Körperwinkel, drei an den Grenzen der Grundfläche und einander vollkommen gleich; den vierten aber an der Spitze. Jeder wird von drei Seitenwinkeln gebildet.

Sämmtliche Kanten stehen schief auf der Grundfläche, sind aber gleich gegen sie geneigt. Dieser Neigungswinkel wird durch eine Kantenlinie selbst und durch eine zweite Linie gebildet, welche ihren unteren Punct mit dem Mittelpuncte der Grundfläche verbindet.

Auch ist jede Seitenfläche gegen die Grundfläche spitzwinkelig und gleich geneigt.

Da jeder der vier Körperwinkel von drei ebenen Winkeln gebildet wird, so befinden sich im Ganzen zwölf ebene Winkel an dem Körper.

Auch ist die Zahl seiner sämmtlichen Gränzlinien durch die drei Seitenkanten und durch die drei Seitenlinien der Grundfläche bestimmt und beträgt daher sechs.

Seine Gesammtfläche besteht in vier Dreiecken, wovon drei einander congruent sind und deren jedes, wenn sich der Körper über dasselbe erhebt, als dessen Grundfläche zu betrachten ist.

Aus diesen Anschauungen folgt, daß die senkrechte dreieckige Pyramide ein Körper sei, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, und dessen Seitenflächen drei unter sich congruente, gewöhnlich gleichschenkelige, bisweilen aber auch gleichseitige Dreiecke sind.

Diese Erklärung kann auch nur als Worterklärung gelten, da sie die Aufgabe voraussetzt, auf eine Ebene eine gerade Linie lothrecht zu stellen.

II. Die schiefe dreieckige Pyramide läßt sich dadurch anschaulich machen, daß man aus einem, in der Ebene eines Dreiecks gewählten Puncte eine schiefe Linie auf dasselbe errichtet und von jedem seiner Winkelpuncte eine gerade Linie nach ihrem gemeinsamen Endpuncte zieht. Auch kann dieser Körper leicht durch Modelle anschaulich werden.

Man betrachtet an ihm seine drei Seitenflächen, seine Spitze, seine drei Seitenkanten, deren jede oder deren nur eine auf der Grundfläche senkrecht stehet. Auch sind sie unter sich ungleich an Größe und verschieden gegen die Grundfläche geneigt.

Von den vier Körperwinkeln ist jeder aus drei ebenen Winkeln gebildet; so, daß im Ganzen zwölf ebene Winkel erscheinen.

Die Gesammtoberfläche dieser Pyramide wird von vier Dreiecken gebildet, welche ihren Körperraum ringsumher einschließen. Uebrigens kann jedes Seitendreieck zur Grundfläche werden.

Die schiefe dreieckige Pyramide ist daher jener Körper, welcher von vier Dreiecken als Seitenflächen so begränzt wird, daß ihre Seitenkanten mit der Grundfläche ungleiche Winkel bilden.

Denkt man sich ein Dreieck und ausserhalb seiner Ebene einen Punct, durch welchen eine gerade Linie bis zu einem Winkelpuncte des Dreiecks gezogen ist, so kann man diese Linie sich dergestalt ringsum den Umfang des Dreiecks bewegen lassen, daß ihr oberer

Endpunct hierbei unbeweglich bleibt. Der auf diese Art entstandene Körper ist eine dreiseitige (der Regel nach schiefe) Pyramide, deren Entstehung also hier schon vollkommen befriedigend erkannt wird.

III. Gleichwie es eine senkrechte dreieckige Pyramide gibt, so läßt sich auch die Entstehung einer senkrechten viereckigen Pyramide anschaulich nachweisen. Man errichte aus dem Mittelpuncte eines Rechtecks oder eines Quadrates ein Loth von willkührlicher Größe und ziehe von seinem Endpuncte nach jedem Scheitelpuncte des Vierecks eine gerade Linie, so entsteht hierdurch ein Körper, welcher eine senkrechte viereckige Pyramide heißt. Es ist klar, daß die Grundfläche derselben auch ein Quadrat seyn kann.

Wenn man diesen Körper aus irgend einem Stoffe verfertiget, so zeigt die wirkliche Anschauung das Rechteck oder das Quadrat als Grundfläche und dann vier Dreiecke als Seitenflächen, welche, bei der quadratischen Grundfläche, einander alle congruent; bei einem Rechtecke aber nur paarweise gegenüberliegend übereinstimmend sind.

Gegen der Grundfläche über erblickt man als Scheitelpunct des Körperwinkels die Spitze der Pyramide, aus welcher die vier Seitenkanten nach den Winkelpuncten der Grundfläche ausgehen, die unter sich einander gleich sind.

Das aus der Mitte der Grundfläche sich erhebende Loth erscheint als die Achse dieses Körpers, welcher überhaupt von fünf Körperwinkeln umgränzt ist; so, daß der an der Spitze liegende von

vier, jeder an der Grundfläche befindliche aber von drei ebenen Winkeln umschlossen ist. Daher lassen sich im Ganzen sechzehn ebene Winkel nachweisen.

Die Kanten stehen schief auf der Grundfläche, sowie auch jede der vier Seitenflächen und es lassen sich die Neigungswinkel dieser Ebenen ebenfalls leicht zur Anschauung bringen.

Die Gesammtfläche dieser Pyramide besteht aus der Grundfläche und aus zwei oder aus vier Paaren congruenter Dreiecke. Was diese Gränzflächen einschließen, ist der körperliche Raum der Pyramide.

Daher kann man sagen, die senkrechte viereckige Pyramide ist jener Körper, der zur Grundfläche ein Rechteck oder Quadrat und als Seitenflächen vier gleichschenkelige Dreiecke hat; so zwar, daß eine gerade, von dessen Spitze nach dem Mittelpuncte seiner Grundfläche gezogene Linie auf dieser lothrecht steht.

Hieraus folgt, daß die wirkliche Entstehung dieses Körpers von einem Lothe abhängt, welches aus der Mitte seiner Grundfläche auf sie gezogen wird, und daß folglich, ehe diese Aufgabe wissenschaftlich gelöset ist, die Erklärung desselben eine bloße Worterklärung bleibt.

Man könnte auch die Entstehung dieser Pyramide so nachweisen, daß man in einer Ebene ein willkührliches Quadrat und auf jede Seite desselben in der nämlichen Ebene ein gleichschenkeliges Dreieck von gleicher Größe construirte. Läßt man nun diese vier

Dreiecke sich um ihre Grundlinien, als unbewegliche Achsen, so lange aufwärts drehen, bis ihre vier Spitzen in eine einzige zusammentreffen, so enstehet hierdurch die senkrechte vierseitige Pyramide. Indessen ist auch diese Entstehung noch keine streng wissenschaftliche.

IV. Wenn man in irgend einem Vierecke einen beliebigen Punct wählt, aus diesem auf die Fläche des Vierecks eine gerade Linie schief errichtet und nun von ihrem Endpuncte nach jedem Winkelpuncte des Vierecks eine gerade Linie zieht, so entsteht hierdurch ein Körper, welcher schiefe viereckige Pyramide heißt.

Diese Erklärung kann hier schon als eine Sacherklärung betrachtet werden, da die Entstehung des fraglichen Körpers überzeugend aus ihr hervorgeht.

Daher kann man sagen, die schiefe viereckige Pyramide ist jener Körper, welcher von einem Vierecke als Grundfläche und von vier Dreiecken als Seitenflächen dergestalt umschlossen wird, daß die vier Seitenkanten ungleiche Winkel mit der Grundfläche bilden.

Es ist klar, daß auch hier alles das zur Anschauung gebracht werden kann, was bei der senkrechten dreieckigen Pyramide betrachtet worden ist.

Auch läßt sich die Entstehung dieser Pyramide dadurch hier schon befriedigend nachweisen, daß man sich ein Viereck als Grundfläche, ausserhalb desselben einen willkührlichen Punct und von diesem Puncte eine beliebige gerade Linie zu einem Winkelpuncte des Vierecks denkt. Wird nun diese Linie, mit ihrem

oberen Endpuncte feststehend, dergestalt um die Grundfläche geführt, daß sie ihre vier Seitenlinien allerwärts berührt, so kann hierdurch ebenfalls diese viereckige Pyramide erzeugt werden.

V. Wenn man sich anstatt eines Dreiecks oder Vierecks, wie bisher, ein Fünfeck als Grundfläche und oberhalb desselben einen beliebigen Punct vorstellt, welchen man mit jedem der fünf Winkelpuncte durch eine gerade Linie verbindet, so muß auf gleiche Weise eine fünfeckige Pyramide entstehen.

Der Körperwinkel an ihrer Spitze ist hier von fünf Seitenwinkeln begränzt, sie hat fünf Seitenkanten, ist im Ganzen von zwanzig ebenen Winkeln umschlossen, man erkennt an ihr überhaupt zehn Seitenlinien u. s. w.

Wäre die Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck und aus seiner Mitte ein Loth errichtet, so entstände hieraus eine senkrechte sechseckige Pyramide und das obenbemerkte Loth würde ihre Achse seyn.

Errichtete man aber aus dem Mittelpuncte des regelmäßigen Fünfecks oder aus einem in der Ebene irgend eines andern Fünfecks gewählten Puncte eine gerade Linie schief auf diese Ebenen und verführe wie vorhin, so entstände eine schiefe fünfeckige Pyramide.

Fährt man auf diese Weise fort, die Zahl der Seitenflächen zu vermehren, so entstehen hieraus Pyramiden von einer immer größeren Zahl der Ecken und man kann sich hierdurch zu dem allgemeinen Begriffe von der Pyramide überhaupt erheben, indem man sagt: eine Pyramide überhaupt ist

derjenige Körper, welcher von irgend einem geradlinigen Vielecke und von soviel Seitendreiecken umschlossen ist, als dieses Vieleck Seiten hat. Auch kann man aus dem Bisherigen die Entstehung solcher Pyramiden auf faßliche Weise ableiten.

§. 2.

Runde pyramidalische Körper.

I. Zu den runden pyramidalischen Körpern gehört zunächst der senkrechte Kegel. Man denke sich irgend ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Catheten von ungleicher Größe sind und nehme an, es drehe sich dasselbe um die größere Cathete, als unbewegliche Achsenlinie, einmal ganz und gar umher, bis es wieder zur ersten Lage zurückkehrt. Hier beschreibt die kleinere Cathete einen Kreis und die Hypotenuse eine krumme, in sich selbst zurücklaufende einfach gekrümmte Fläche. Der von beiden eingeschlossene Körper ist der senkrechte Kegel.

An diesem Körper, welcher leicht auch an einem wirklichen Modelle versinnlicht werden kann, betrachtet man zuerst seine Grundfläche, welche ein Kreis ist, und dann die krumme Seitenfläche, welche mit ihr den Körper bildet.

Gegen der Grundfläche über liegt die Spitze der Pyramide und eine gerade Linie von ihr zum Mittelpuncte der Grundfläche gezogen, erscheint als Achse dieses Kegels, welcher daher auch, weil sie auf ihr lothrecht steht, der senkrechte Kegel genennt wird.

Auch erkennt man, daß die krumme Seitenfläche gegen die Spitze des Kegels hin immer mehr; aber gegen seine Grundfläche hin immer weniger gekrümmt ist.

Daher kann man den senkrechten Kegel als jenen Körper erklären, welcher von einem Kreise als Grundfläche und von einer einfach gekrümmten, in eine Spitze auslaufenden Seitenfläche so umschlossen ist, daß eine gerade, von dieser Spitze nach der Mitte des Kreises gezogene Linie auf dieser lothrecht steht.

Da die Entstehung dieses senkrechten Kegels aus der Umdrehung eines rechtwinckeligen Dreiecks um eine seiner Catheten sehr einleuchtend hervorgeht, so kann man diese Erklärung als Sacherklärung annehmen.

Denkt man sich, daß der senkrechte Kegel durch eine Ebene geschnitten wird, welche seinen körperlichen Raum längs der Achse hin in zwei congruente Theile theilt, so ist klar, daß dieser Achsenschnitt ein gleichschenkeliges Dreieck darstellt, welches zwei solcher congruenten rechtwinkeligen Dreiecke enthält, aus deren Umdrehung dieser Kegel entstanden ist. Die Hypotenuse dieser Dreiecke wird auch die Seite des Kegels genennt und man erkennt sehr deutlich hieraus, daß die Seitenfläche des Kegels eine einfachgekrümmte seyn muß, weil sie aus der Seitenbewegung dieser Hypotenuse entstanden ist.

II. Dem senkrechten Kegel zur Seite steht der schiefe, dessen Entstehung man sich am faßlichsten so vorstellt. Man nehme eine Kreisfläche und aus

ihrem Mittelpuncte eine auf ihr schiefstehende Linie an, ziehe von ihrem Endpuncte nach irgend einem Puncte der Peripherie eine gerade Linie von unbestimmter Länge. Bewegt sich nun diese Linie, mit ihrem oberen Endpuncte fest, dergestalt an der Peripherie der Grundfläche umher, daß sie immer mit ihr in Berührung bleibt, so entsteht eine krumme Seitenfläche, welche mit jener kreisförmigen Grundfläche den schiefen Kegel bildet.

Auch kann man diesen Körper leicht in einem wirklichen Modelle zur Anschauung bringen.

Man erkennt an ihm seine Grundfläche, seine krumme Seitenfläche, seine Spitze, seine, auf der Grundfläche schiefstehende Achse und seinen körperlichen Raum.

Daher ist der schiefe Kegel ein Körper, dessen Grundfläche ein Kreis, dessen Seitenfläche eine in sich selbst zurücklaufende, einfach gekrümmte Fläche und dessen Achse schief auf der Grundfläche ist.

Wenn der schiefe Kegel mit einer Ebene längs seiner Achse so geschnitten wird, daß die Richtung des Schnittes durch die Ebene des Neigungswinkels dieser Achse geht, so entsteht ein ungleichseitiges Dreieck, dessen eine Seite größer, dessen andere aber kleiner als die Achse ist. Hat die Durchschnittsebene eine andere Richtung, so wird die größere Seite dieses Achsendreiecks immer kleiner, die kleinere größer, bis bei einem Schnitte, dessen Richtung auf jener des ersten lothrecht stehet, beide Seiten einander gleich sind.

Der schiefe Kegel heißt demnach auch der ungleichseitige, da man den senkrechten Kegel, weil sein Achsendreieck immer das nämliche gleichschenkelige ist, den gleichseitigen Kegel nennen kann.

Denkt man sich irgend ein schiefwinkeliges Dreieck z. B. ein stumpfwinkeliges, welches um eine seiner Seitenlinien, als feststehende Achse, umhergedreht werden kann, so wird man sich bald überzeugen, daß hieraus kein schiefer Kegel, sondern jedesmal eine Verbindung von zwei senkrechten Kegeln erzeugt wird.

III. Auch wird man aus dem Bisherigen die Entstehung anderer, kegelähnlicher Körper leicht erkennen.

Man nehme z. B. irgend eine unregelmäßige, krummlinig begränzte Ebene als Grundfläche, ausser ihr einen willkührlichen Punct, von ihm eine gerade Linie zum Umfange der Figur und denke, sie bewege sich, indem ihr oberer Punct unverrückt bleibt, rings der Peripherie dieser Grundfläche her, so entsteht ein kegelähnlicher Körper, welcher hier durchaus rundlich erscheint.

Bestände aber die Grundfläche theils aus geraden, theils aus krummen Linien und man verführe hinsichtlich der Entstehung dieses Körpers ebenso, so entstände ebenfalls ein kegelförmiger, aber hier theils rundlich, theils eckiger Körper.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Anschauliche Entstehung der senkrechten dreieckigen Pyramide? Entwickelung dessen, was die Anschau-

ung an ihr erkennt? Erklärung dieses Körpers? Ist sie eine Sach- oder Wort-Erklärung? Entstehung der schiefen dreieckigen Pyramide? Was erkennt die Anschauung an ihr? Wie wird sie erklärt? Von welcher Art ist diese Erklärung? Was haben beide Pyramiden Gemeinschaftliches und Unterscheidendes? — Wie entsteht die lothrechte viereckige Pyramide? Was erkennt die Anschauung an ihr? Was ist die lothrechte viereckige Pyramide? Wie entsteht die schiefe viereckige Pyramide? Begriff dieses Körpers? Was hat die viereckige Pyramide mit der dreieckigen gemein und wie unterscheiden sie sich? Wie entsteht die fünf, sechs, sieben und überhaupt die vieleckige Pyramide? Was erkennt die Anschauung an derselben? Was ist die Pyramide überhaupt? Was die senkrechte, was die schiefe? — Wie unterscheiden sich die prismatischen von den pyramidalischen Körpern? (§. 1.)

II. Wie entsteht der senkrechte Kegel durch die Anschauung? Was ist seine Grundfläche, Seitenfläche, Achse, Spitze? Warum heißt er senkrecht? warum gleichseitig? Was ist das Achsendreieck? Was ist der senkrechte Kegel? Warum heißt er gleichseitig? Wie entsteht der schiefe Kegel? Was ist der schiefe Kegel? Welche Erklärung ist dieses? Was erkennt die Anschauung an ihm? Warum heißt er auch ungleichseitig? Was ist der Kegel überhaupt? Warum ist die Seitenfläche des Kegels eine einfach gekrümmte Fläche? Was haben die Kegel mit den Pyramiden gemein? Sind Kegel als pyramidalische Körper zu betrachten? Was und wievielerlei sind kegelförmige Körper? (§. 2.)

III. Lehrübung.

Die Kugel und die regelmäßigen Körper.

§. 1.

Die Kugel.

I. Gleichwie in der ebenen Geometrie der Kreis als der Schluß aller regelmäßigen Figuren erscheint, so bildet auch in der Körperlehre die Kugel den Gegenstand der Schlußbetrachtung der Körper dar.

Man denke sich irgend einen Halbkreis und nehme an, er bewege sich um seinen Durchmesser als feste unbewegliche Achsenlinie einmal umher, bis er wieder in die erste Lage zurückkehrt, so beschreibt diese krumme Linie eine krumme Fläche, durch welche die Kugel eingeschlossen wird.

Da jeder Punct in der halben Peripherie des Kreises von seinem Mittelpuncte gleiche Entfernung hat; so muß auch jeder Punct der Kugeloberfläche von dem nämlichen Mittelpuncte gleiche Entfernung haben.

Daher ist die Kugel jener Körper, welcher von einer allseitig gekrümmten Oberfläche so umschlossen ist, daß jeder Punct in derselben von einem im Kugelraume selbst befindlichen Puncte allerwärts gleiche Entfernung hat.

Da die Entstehung der Kugel auf die eben bemerkte Weise an und für sich schon überzeugend erkannt wird, so ist ihre Erklärung eine Sacherklärung.

II. Aus diesem Begriffe gehen folgende Erklärungen hervor, welche ebenfalls den Rang von Sacherklärungen haben:

Die **Kugelfläche** ist die den Kugelraum einschließende, allseitig gekrümmte Fläche.

Der **Durchmesser** der Kugel ist eine gerade Linie, welche durch den Mittelpunct der Kugel und beiderseits bis zu ihrer Oberfläche geht; der **Halbmesser** aber eine gerade, vom Mittelpuncte der Kugel zur Oberfläche reichenden Linie.

Jede zwei einander gegenüberliegende Endpuncte des Durchmessers der Kugel heißen ihre **Pole** und der Durchmesser selbst wird in Bezug auf sie die **Achse** genennt. Denkt man sich irgend eine Achsenlinie als unbeweglich und eine Kugel in einer drehenden Bewegung um sie her, so wird die Kugel auch bei dieser Bewegung immer denselbigen Raum einnehmen.

Wenn eine Kugel durch eine Ebene so geschnitten wird, daß der Durchschnitt durch ihren Mittelpunct geht, so wird sie in zwei gleiche **Halbkugeln** getheilt und die Durchschnittsfigur ist ein Kreis, welcher der **größte Kreis** genennt wird, weil er derjenige ist, aus dessen Umdrehung die Kugel entstanden ist.

Wird dagegen die Kugel von einer Ebene geschnitten, welche nicht durch ihren Mittelpunct geht, so entsteht ebenfalls ein Kreis, welcher kleiner, als der vorige ist, und immer noch kleiner wird, je weiter der Durchschnitt vom Mittelpuncte entfernt ist.

Es entstehen hierdurch zwei Theile der Kugel, ungleich an Größe, deren jeder von dem Durchschnittskreise und einem Theil der Kugelfläche begränzt ist. Jedes dieser Kugelstücke wird **Kugelabschnitt**

genennt, und man sieht, daß er mit dem Kreisabschnitte in der Planimetrie manches Aehnliche hat.

Denkt man sich aus dem Mittelpuncte der Kugel einen Radius nach irgend einem Puncte in der Peripherie eines solchen kleineren Durchschnittskreises und nimmt an, er bewege sich rings um dessen Peripherie her, so entsteht ein senkrechter Kegel, dessen Grundfläche dieser Durchschnittskreis und dessen Seite der Halbmesser ist. Dieser Kegel, in Verbindung mit dem, diesem Durchschnittskreise entsprechenden Abschnitte, wird eine Kugelpyramide genennt und man erkennt, daß sie dasjenige für die Kugel ist, was in der Planimetrie ein Kreisausschnitt für den Kreis war.

Denkt man sich zwei Parallelschnitte durch die Kugel, so wird das zwischen beiden enthaltene Kugelstück ein körperliches Zonenstück, sowie auch jener Theil der Oberfläche, welcher zwischen diese Ebenen fällt, eine Kugelzone genennt.

III. Noch gehören hierher die kugelähnliche Körper, welche aus der Umdrehung unregelmäßiger krummer Linien um solche gerade Linien entstehen, welche man in ihnen von einem Puncte zum andern zieht. Sie können, wie man leicht einsieht, höchst mannigfaltig seyn, da jene krummen Linien, aus deren Umdrehung sie entstehen, ebenfalls höchst verschiedenartig sind.

Wenn eine solche Linie, welche von einem Endpuncte einer geraden ausgeht und sich zum andern Endpuncte hin erstreckt, aus geraden und krummen Linien zusammengesetzt ist, und um jene gerade Linie

als feste Achse herumbewegt wird, so entsteht ein Körper, dessen Oberfläche theils aus einfach gekrümmten, theils aus allseitig gekrümmten Flächen besteht; sowie man überhaupt einsieht, daß aus der Umdrehung ebener Figuren sehr mannigfaltige Körper erzeugt werden können.

§. 2.

Die regelmäßigen Körper.

I. Man versteht überhaupt unter regelmäßigen Körpern solche, welche von regelmäßigen Seitenflächen, alle unter sich congruent, so begränzt werden, daß sie auch unter den nämlichen Neigungswinkeln zusammengesetzt sind. Als solche Körper erscheint: das Tetraëder, der Würfel, das Octaëder, das Icosaëder und das Dodecaëder.

Wenn man über jede Seite eines in der Ebene gegebenen gleichseitigen Dreiecks wiederum ein gleichseitiges Dreieck beschreibt und diese drei Dreiecke sich so um die drei Seitenlinien des ersten Dreiecks aufwärts bewegen läßt, daß ihre drei Spitzen in eine einzige zusammenfallen, so entsteht eine dreiseitige Pyramide, welche Tetraëder heißt.

Wenn man diesen Körper im Modelle vor sich hat, so betrachtet man an ihm die vier Seitenflächen, welche vier gleichseitige, unter sich congruente Dreiecke sind.

Die vier Körperwinkel, deren jeder dem andern vollkommen congruent ist. Auch wird jeder derselben von drei gleichen spitzen Winkeln umschlossen.

Der Körper hat sechs Seitenkanten, welche sämmtlich einander gleich sind und gegen das Dreieck, worauf sie stehen, gleiche Neigung haben.

Auch ist jede der drei Seitenflächen gegen jede der drei an sie angränzenden unter gleichem Winkel geneigt.

Dieser Körper zeigt sich immer auf dieselbe Weise, man mag, was immer für eine Seitenfläche als Grundfläche wählen. Das Tetraëder erkennt man sogleich als eine Gattung dreiseitiger Pyramiden und zwar als eine senkrechte, bei welcher die vier Lothe, welche von den Scheitelpuncten der vier Körperwinkel auf die gegenüberliegenden Grundflächen möglich sind, alle einerlei Größe haben.

Das Tetraëder wird deshalb ein regelmäßiger Körper genennt, weil es von vier regelmäßigen, unter sich congruenten Seitenflächen so umschlossen ist, daß sie lauter gleiche Körperwinkel, gleiche Seitenkanten und gleiche Kantenwinkel bilden.

Obwohl die Entstehung dieses Körpers hier schon ziemlich befriedigend nachgewiesen wurde, so gehört doch seine wissenschaftliche Entstehung den spätern Sätzen der Stereometrie an.

II. Wenn man in der Ebene, worin sich irgend ein Quadrat befindet, über jede Seite desselben wiederum ein Quadrat nach aussen construirt, und diese vier Quadrate sich um die vier Seiten des ersten als Achsenlinien so bewegen läßt, daß dieselbe auf der Ebene des ersten lothrecht stehen und mit zwei ihrer benachbarten Seitenlinien zusammenfallen, so erkennt man hieraus die Entstehung des Würfels.

Wenn derselbe nach einem wirklichen Modelle verfertigt ist, so erblickt man seine quadratische Grundfläche, seine ihr congruente Oberfläche, seine vier quadratischen Seitenflächen, welche unter sich und jeder der beiden genannten Flächen congruent sind und auf ihr lothrecht stehen.

Die gesammte Umfangsfläche des Würfels besteht daher aus acht congruenten Quadraten.

Er zeigt acht Körperwinkel, wovon vier an der Grundfläche und vier an der Oberfläche liegen, und deren jeder von drei rechten Winkeln gebildet wird.

Er hat zwölf Seitenkanten, alle einzeln genommen einander gleich; und jede steht auf den beiden Berührungsflächen lothrecht. Auch erblickt man zwölf Kantenwinkel, deren jeder ein rechter ist, und man erkennt überhaupt, daß der Würfel als besondere Art des senkrechten Parallelopipedums erscheint. Da derselbe von acht unter sich congruenten Quadraten umschlossen wird, welche überall gleiche Körperwinkel, gleiche Seitenkanten und gleiche Neigungen bilden, so ist derselbe ein regelmäßiger Körper und jede Seitenfläche kann ebenso als seine Grundfläche betrachtet werden.

Die vollkommne überzeugende Entstehung des Würfels gehört der eigentlichen Stereometrie an.

III. Wenn man sich ein Quadrat, über jeder Seite desselben in der nämlichen Ebene ein gleichseitiges Dreieck beschrieben denkt, und nun annimmt, daß jedes derselben sich um diese Seite als Achsenlinie so herumbewegt, bis die sämmtlichen vier

Scheitelpuncte sich in einer Spitze vereinigen, so entsteht eine senkrechte vierseitige Pyramide, welche, wenn man sich dieselbe noch einmal und mit ihren quadratischen Grundflächen zusammengefügt denkt, einen regelmäßigen Körper bildet, welcher Octaëder genennt wird.

Wenn dieser Körper aus irgend einer festen Materie verfertiget wird, so bietet er der Anschauung acht gleichseitige, unter sich congruente gleichseitige Dreiecke als Seitenflächen, sowie auch acht unter sich vollkommen gleiche Körperwinkel dar, deren jeder von drei gleichen ebenen Winkeln begränzt ist. Auch hat derselbe zwölf unter sich gleiche Seitenkanten, seine Seitenflächen haben paarweise dieselbige Neigung gegeneinander; so, daß dieser Körper von allen Seiten her als vollkommen regelmäßig erscheint. Hierdurch ist aber die eigentlich wissenschaftliche Entstehung desselben keineswegs nachgewiesen, und es bleibt noch der eigentlichen Wissenschaftslehre vorbehalten, dieselbe überzeugend darzustellen.

Als Worterklärung kann man sagen, das Octaëder ist ein Körper, welcher von acht gleichseitigen, unter sich congruenten Dreiecken so gebildet wird, daß er von allen Seiten her vollkommen regelmäßig erscheint.

Noch lehrt die Anschauung, daß jeder Seitenfläche eine ihr congruente Seitenfläche, sowie auch jeder Spitze eine Spitze gegenüber liegt. Denkt man sich von einer dieser Spitzen zur andern eine gerade Linie, so steht dieselbe auf der zwischen beiden liegen-

den, den ganzen Körper halbirenden quadratischen Theilungsfläche lothrecht.

Denkt man sich das Octaëder nach dieser quadratischen Gränzfläche durchschnitten, so wird es hierdurch in zwei vollkommen congruente senkrechte viereckige Pyramiden getheilt.

Man nennt irgend eine der zwölf Kanten dieses Körpers die Seite des Octaëders, und es ist klar, daß von der Größe dieser Seitenlinien die Größe des ganzen Körpers abhängt.

IV. Das Icosaëder ist jener Körper, welcher von zwanzig, unter sich congruenten gleichseitigen Dreiecken so eingeschlossen ist, daß sämmtliche Körperwinkel und Neigungen der Seitenflächen einander gleich sind, wodurch der ganze Körper als ein vollkommen regelmäßiger erscheint.

Um eine klare Vorstellung dieses Körpers zu erhalten, ist es nöthig, denselben, im Modelle verfertigt, vor Augen zu bringen.

Man erkennt dann sogleich, sowohl seine zwanzig congruenten Seitenflächen, als auch seine zwölf Körperwinkel, deren jeder aus fünf gleichen ebenen Winkeln gebildet ist.

Auch erblickt man jede der zwanzig unter sich gleichen Seitenkanten, sowie auch jeden der zwanzig, ebenfalls gleichen Kantenwinkel.

Betrachtet man irgend eine seiner dreieckigen Umfangsflächen als Grundfläche, so liegt ihr eine vollkommen congruente als Oberfläche gegenüber. Auch steht jedem Scheitelpuncte ein anderer Scheitelpunct entgegen.

Ferner lehrt die Anschauung, daß alle geraden Linien, welche zwei gegenüberliegende Scheitelpuncte verbinden, einander gleich sind; auch daß das Icosaëder in zwei vollkommen congruente senkrechte fünfeckige Pyramiden und in einen zwischen beiden liegenden Körper getheilt werden kann, dessen Grund- und Oberfläche ein gleiches regelmäßiges Fünfeck, und dessen Seitenfläche eine Verbindung von zehn unter sich congruenten gleichseitigen Dreiecken ist.

V. Der letzte regelmäßige Körper ist das Dodecaëder, d. h. ein Körper, welcher von zwölf congruenten regelmäßigen Fünfecken umschlossen wird, die allerwärts gleiche Körperwinkel, gleiche Seitenkanten und gleiche Kantenwinkel bilden.

Auch dieser Körper muß in einem wirklichen Modelle angeschaut werden, um sich einen klaren Begriff von ihm zu bilden.

Man erblickt sogleich zwölf gleiche regelmäßige Fünfecke, wovon eines als Grundfläche, ein ihm gegenüberstehendes als Oberfläche und eine Verbindung von zehn andern als Seitenfläche zu betrachten ist.

Auch erkennt man die zwanzig Körperwinkel, deren jeder von drei gleichen ebenen Winkeln gebildet wird; sowie rings um den Körper zwanzig Kanten und ebensoviele Kantenwinkel, alle unter sich gleich, befindlich sind.

Es zeigt dieser Körper, man mag ihn auf was immer für eine Seitenfläche stellen, jedesmal den nämlichen Anblick wegen seiner durchaus regelmäßigen Gestalt.

Die wissenschaftliche Entstehung dieses Körpers bleibt ebenfalls der eigentlichen Stereometrie vorbehalten.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Wie entsteht die Kugelfläche und die Kugel? Was ist die Kugel? Erklärung der hierbei vorkommenden Begriffe? Wie entsteht die Halbkugel? Was ist der größte Kreis der Kugel? Wie entsteht er? Wie entsteht der Kugelabschnitt? Begriff desselben? Was ist die Kugelpyramide? Aus welchen zwei Körpern besteht dieselbe? Was ist ein körperliches Zonenstück? Was eine Kugelzone? Welche Körper heissen kugelähnliche? Wie entstehen dieselbe? Welche der bisherigen Erklärungen sind Sach-, welche sind Wort-Erklärungen? (§. 1.)

II. Was versteht man unter regelmäßigen Körpern? Wievielerlei dergleichen gibt es? Wie entsteht das Tetraëder? Was erkennt die Anschauung an ihm? Erklärung dieses Körpers? Wie entsteht der Würfel? Was läßt sich an ihm anschauen? Wie erklärt man denselben? Ist der Würfel eine Gattung der viereckigen Prismen und welcher? Entstehung des Octaëders durch die Anschauung? Was stellt dieser Körper der Anschauung dar? Zu welcher Gattung von Körpern gehört das Octaëder? Was ist seine Seite? Anschauliche Entstehung des Icosaëders? Was zeigt die Anschauung an ihm? Begriff dieses Körpers? In was kann dieser Körper zertheilt werden? Was ist das Dodecaëder? Was lehrt die Anschauung an ihm? In welche Körper kann das Dodecaëder zertheilt werden? Welche dieser Erklärungen sind Sach-, und welche sind Wort-Erkärungen? (§. 2.)

Dritter Lehrgang.

Darstellung der Körper in der Ebene.

I. Lehrübung.

Darstellung der wichtigsten Lagen der Linien und Ebenen durch einfache Zeichnungen.

§. 1.

Gerade Linien auf Ebenen.

I. In dem Bisherigen sind die Körper nach der Anschauung ihrer wirklichen Modelle oder doch so betrachtet worden, wie man dieselben im körperlichen Raume darstellen könnte. Die Entwickelung der wissenschaftlichen Lehren der Stereometrie macht es nicht sowohl durchaus nothwendig, als für den Lehrvortrag, wie für das Selbststudium höchst bequem, sowohl die verschiedenen Lagen der Linien gegen Ebenen, als auch der Ebenen gegen die Ebenen und endlich die Construction der Körper selbst auf anschauliche Weise so darzustellen, daß sich alle Linien in einerlei Ebene befinden. Daher ist es durchaus nöthig, daß sich die Anfänger dieses Studiums sehr frühe daran gewöhnen, an solchen, in der Ebene liegenden Linien wirkliche Körper zu erkennen eine kleine Uebung, sowohl in der Zeichnung solcher Linien als auch in der Art sie anzublicken, wird die Anschauungskraft so stärken, daß man nicht bloß die ganzen Körper, sondern auch bestimmte Stücke von ihnen vollkommen deutlich erkennt. Der hier folgende Lehrgang soll

dazu eine vom Einfachen zum Zusammengesetzteren fortschreitende Anleitung geben.

II. Man denke sich unter abcd (Fig. 1.) irgend eine durch gerade oder krumme Linien umschlossene Ebene, unter n einen in ihr willkührlich gewählten Punct, und unter um eine gerade, sich von n über die Ebene erhebende Linie, so wird dieselbe als ein Loth auf abcd erkannt werden, wenn man sich sowohl unter dem Winkel mnq, als unter mnp einen rechten Winkel vorstellen kann. Nun lehrt zwar die Anschauung, daß jeder dieser beiden Winkel ein stumpfer wäre, wenn die Linie mn sich innerhalb der Ebene abcd befände. Allein diese Annahme hat nicht statt, da man sich vorstellen muß, daß die gerade nm sich über diese Ebene erhebt. Man muß daher den Blick daran gewöhnen, sowohl den Winkel mnq als mnp für einen rechten zu erkennen, welcher er wirklich seyn muß, wenn mn senkrecht auf abcd steht. Zöge man durch den Punct n in dieser Ebene noch eine andere Linie ng, so müßte man auch den Winkel mng, welcher eigentlich ein spitzer ist, wiederum als einen rechten erkennen. Zöge man nh lothrecht auf nm, so würde der Winkel mnh auch für den senkrechten Stand der Linie nm auf abcd ein rechter seyn. Es ist nöthig, den Blick so lange zu üben, bis man sich unter mn eine auf abcd lothrechte Linie denken kann.

III. Es sei bcdf (Fig. 2.) wiederum eine Ebene, a ein willkührlicher Punct in ihr, aus welcher sich die gerade ad über dieselbe erhebt, so erblickt man in da eine auf bcdf schiefstehende Linie. Man wird

diesen schiefen Stand um so anschaulicher erkennen, wenn man sich unter dg eine auf bcdf senkrecht stehende Linie und von g durch a die gerade Linie gaq vorstellt. Hier wird der spitze Winkel dag der Neigungswinkel seyn, unter welchem da gegen die Ebene geneigt ist, und das rechtwinkelige Dreieck dag wird ebenfalls lothrecht auf bcdf stehen. Der stumpfe Winkel daq als Nebenwinkel von dag kann auch die schiefe Lage der Linie ad gegen die Ebene bcdf bestimmen. Es ist zweckmäßig, ähnliche Zeichnungen zu entwerfen, um hierdurch die größere oder kleinere schiefe Neigung einer Linie gegen eine Ebene anschaulich darzustellen.

§. 2.

Ebenen auf Ebenen.

I. Wenn man sich die Ebene qprt (Fig. 3.) und acmd vorstellt, welche sich beiderseits in der geraden Linie dm durchschneiden, so erscheint die zweite Ebene auf der erstern lothrecht stehend. Um diesen lothrechten Stand recht anschaulich zu erkennen, nehme man in dm den willkührlichen Punct n, ziehe in der Ebene qprt die Linie nv lothrecht auf dm und innerhalb der Ebene acmd die nb ebenfalls auf dm lothrecht, wodurch der Winkel bnv als ein rechter erscheint, so wie auch der Winkel bns, wenn vn über n verlängert wird. Da nun, nach dem Vorhergehenden, eine Ebene auf der andern senkrecht steht, wenn ihr Neigungswinkel ein rechter ist, so muß man sich unter acmd eine auf qprt lothrecht

stehende Ebene denken. Aber es ist auch klar, daß sowohl die Ebene pdmr als auch qdmt auf der Ebene admc lothrecht steht. Auch hier ist es rathsam, sich in solchen Zeichnungen gehörig zu üben.

II. Wenn man die Ebene vrtp (Fig. 4.) und die sie schneidende gacd betrachtet, so lehrt die Anschauung, daß letztere auf ersterer nicht senkrecht, sondern schief steht. Dieser schiefe Stand wird um so anschaulicher, wenn man sich wiederum aus dem in der Durchschnittslinie ac beliebig gewählten Puncte b auf ac in der Ebene vrtp das Loth bn und in der Ebene gacd das Loth bh denkt, wodurch der Winkel hbn als Neigungswinkel der beiden Ebenen erscheint. Da nun dieser Winkel ein spitzer ist, so folgt hieraus die schiefe Lage der Ebene gacd gegen vrtp.

Wird nb nach m verlängert, so ist auch der Winkel abm und cbm ein rechter, und man kann den stumpfen Winkel hbm ebenfalls als Neigungswinkel der beiden Ebenen betrachten.

Auch ist klar, daß auf der Ebene gacd sowohl die Ebene ract als auch die Ebene vacp schief steht. Auch hier läßt sich die Anschauung anderer schiefen Neigungen in der Zeichnung darstellen.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Wozu dienen die stereometrischen Zeichnungen? Wie unterscheiden sie sich von den Zeichnungen der Planimetrie? Sind die stereometrischen Zeichnungen

einerlei mit den perspectivischen? Wie wird eine gerade Linie in der Zeichnung dargestellt, welche auf der Ebene lothrecht steht? Wie wird der Neigungswinkel einer lothrechten Linie auf der Ebene dargestellt? Wann steht eine gerade Linie lothrecht auf der Ebene? Von welcher Art ist diese Erklärung? Wie stellt man eine auf der Ebene schief stehende Linie in der Zeichnung dar? Wie wird der Neigungswinkel der schiefen Linie bestimmt? Wie vielerlei ist derselbe? (§. 1.)

II. Wie wird eine Ebene dargestellt, welche auf einer andern lothrecht steht? Wie wird ihr Neigungswinkel bestimmt? Wann steht eine Ebene auf der andern lothrecht? Darstellung einer auf der andern schiefstehenden Ebene? Bestimmung ihres Neigungswinkels und ihres Begriffs? Welche Erklärungen sind dies? (§. 2.)

II. Lehrübung.

Darstellung der sich nicht schneidenden Ebenen und der Körperwinkel.

§. 1.

Anschauliche Darstellung zweier sich nicht schneidenden Ebenen.

I. Die Ebenen abcd (Fig. 5.) und pqrs stellen zwei unter sich parallele oder gleichlaufende Ebenen dar. Um diesen Parallelismus anschaulicher zu erkennen, stellt man eine gerade, auf jeder der beiden Ebenen lothrecht stehende Linie vor. Denkt man sich noch, daß beide Ebenen längs der senkrechten mn von einer dritten geschnitten werden, woraus in der oberen die Linie qp und in der untern die

Linie tv als Durchschnittslinie entsteht, so erscheinen auch diese als parallele Linien, wodurch die Anschauung der Parallelebenen noch mehr aufgekläret wird.

II. Wenn (Fig. 6.) die Ebene acdb die andere Ebene ncdm in der geraden Linie cd durchschneidet, so stellen beide sowohl zusammen- als auseinanderlaufende Ebenen dar. Nimmt man den willkührlichen Punct q und zieht aus ihm auf cd in der Ebene acdb das Loth qp und in ncdm das Loth qr, so stellt der spitze Winkel pqr die Neigung der beiden Ebenen dar. Gleichwie nun die Schenkel pq und rq dieses Neigungswinkels pqr gegen q hin zusammen, gegen p und r aber auseinanderlaufen, so sind auch die Ebenen acdb und ncdm gegen ihre Durchschnittslinie cd hin als zusammenlaufende; von dieser Linie aber gegen ab und nm hin als auseinanderlaufende zu betrachten.

Denkt man sich, der Winkel pqr werde allmählig kleiner oder größer, indem sich beide Ebenen um die feste Linie cd drehen, so entsteht hieraus die Anschauung von mehr oder weniger convergirenden, oder von mehr oder weniger divergirenden Ebenen.

III. Wenn die Ebene acfd von der Ebene bgpq (Fig. 7.) in der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie mn so geschnitten wird, daß von jeder Ebene ein Stück auf zwei entgegengesetzten Seiten der andern liegt, so entstehen hier ähnliche Nebenwinkel und Scheitelwinkel wie in der Planimetrie, wenn zwei gerade Linien sich schneiden. Nimmt man in der Durchschnittslinie mn den willkührlichen Punct o und

ziehet durch ihn auf mn das Loth vw in der einen und be in der andern Ebene, so ist der Winkel bow der obere und eov der untere spitze Neigungswinkel der beiden Durchschnittsebenen; sowie der stumpfe Winkel bov und der ihm gleiche eow ebenfalls diese Neigungen andeuten. Sowie nun die ebenen Winkel bow und bov, bov und voe, voe und eow, endlich eow und wob paarweise Nebenwinkel sind, so entstehen auch durch die Durchschnittsebenen, deren Neigungen diese Winkel darstellen, ähnliche Nebenwinkel. Ein gleiches gilt von den Scheitelwinkeln bow und voe, dann von bov und eow.

IV. Sowie in der Planimetrie durch den Durchschnitt zweier Parallellinien von einer dritten die bekannten Winkel entstehen, welche man die beiden innern, den äusseren und den innern und die zwei Wechselwinkel nennt, so werden ähnliche Winkel als Neigungswinkel zweier Parallelebenen gebildet, welche von einer dritten Ebene geschnitten werden.

Es seien (Fig. 8.) ab und cd die zwei gleichlaufenden Ebenen, welche von der dritten Ebene xy nach den geraden Linien fs und lt geschnitten werden, so lehrt die Anschauung, daß diese Durchschnittslinien ebenfalls parallel sind. Wird nun durch h das Loth on und mg, dann durch r das Loth wv gezogen, so sind auch on und vw gleichlaufend und es stellt der Winkel nhr den einen, so wie vrh den andern innern Winkel dar. Auch ist mhn ein äusserer und mrv sein innerer, sowie auch nhr der eine und wrh der andere, ihm gleiche Wechsel-

winkel ist. Es ist klar, daß alle diese Winkel, als Neigungen der sich schneidenden Ebenen, nun noch weiter aufgezählt und nachgewiesen werden können.

§. 2.

Anschauliche Darstellung der Körperwinkel.

I. Es sei (Fig. 9.) bcd irgend ein geradliniges Dreieck, a ein beliebiger, oberhalb seiner Ebene angenommener Punct und ab, sowie ac und ad eine gerade Verbindungslinie von diesem Puncte nach den Winkelpuncten b, c und d, so wird man sich bei a einen dreikantigen Körperwinkel vorstellen können, welcher von den drei ebenen Winkeln bac, cad und dab umschlossen wird. Auch sind seine drei Kanten die ebengenannten Linien ab, ac und ad. Ausserdem wird man erkennen, daß sich die Oeffnung dieses Körperwinkels vergrößert, wenn die Linien ab, ac und ad noch weiter verlängert werden.

Aber auch am Puncte b liegt ein Körperwinkel, dessen Gränzflächen die Winkel abd, abc und cbd sind, b ist sein Scheitel, ba, bd, bc sind seine Kanten.

Auch bei c ist ein solcher Winkel, von den ebenen Winkeln bca, acd und bcd gebildet.

Der vierte Körperwinkel liegt bei d und seine Gränzen sind die Winkel cda, adb und bdc.

II. Ganz auf ähnliche Weise wird der vierkantige Körperwinkel zur Anschauung gebracht. Es sei nämlich (Fig. 10.) nbhg irgend ein geradliniges Viereck und m ein oberhalb seiner Ebene angenom-

mener willkührlicher Punct. Zieht man die Linien mn, mg, mh und mb, so zeigt sich der Anschauung bei m ein vierkantiger Körperwinkel. Seine vier Gränzflächen sind die Seitenwinkel nmg, gmh, hmb und bmn; seine Seitenkanten aber die geraden mn, mg, mh und mb.

Eben diese Zeichnung stellt noch an jedem der vier Puncte n, g, h und b einen dreikantigen Körperwinkel dar. Bei n sind die Seitenwinkel mnb, bng, mng; bei g sind es die Winkel mgn, mgh, ngh; bei h ist es mhg, mhb, ghb, und bei b sind es mbn, mbh, nbh.

III. Wäre nun (Fig. 11.) bcdfg ein geradliniges Fünfeck und a ein willkührlicher Punct oberhalb seiner Ebene, so entsteht, wenn die geraden ab, ac, ad, af und ag gezogen werden, bei a ein Körperwinkel, welcher von den fünf ebenen Seitenwinkeln bac, cad, daf, fag und gab gebildet und deßhalb ein fünfkantiger Körperwinkel genennt wird. Seine fünf Kanten sind die vorhin genannten ab, ac, ad, af und ag.

Auch sieht man, daß sich an den Winkelpuncten der Grundfläche fünf dreikantige Körperwinkel, bei b, c, d, f und g befinden, deren jeder von drei ebenen Winkeln gebildet wird, welche leicht anschaulich nachzuweisen sind.

Ueberhaupt geht hieraus hervor, wie man den sechskantigen, siebenkantigen, achtkantigen Körperwinkel u. s. w. durch wirkliche Zeichnungen in der Ebene darstellen kann und es ist zu empfehlen, sich in solchen anschaulichen Darstellungen zu üben.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Wie werden zwei unter sich gleichlaufende Ebenen dargestellt? Wie zwei zusammen- und auseinanderlaufende Ebenen? Wie bestimmt man ihren Neigungswinkel? Wie entstehen bei zwei Ebenen Nebenwinkel und Scheitelwinkel? Welche Winkel entstehen, wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten werden? Erklärung dieser Winkel und Erläuterung durch die Anschauung? (§. 1.)

II. Wie wird ein dreikantiger Körperwinkel durch die Anschauung dargestellt? Nachweisung dessen, was die Anschauung an ihm erkennt? Darstellung des vierkantigen Körperwinkels und ebenso des fünfkantigen, sechskantigen u. s. w. Wie kann man sich die Entstehung irgend eines vieleckigen Körperwinkels hier schon befriedigend erklären? (§. 2.)

III. Lehrübung.

Darstellung der verschiedenen Körper durch Zeichnungen, nebst dem Begriffe ihrer Gleichheit, Aehnlichkeit und Congruenz.

§. 1.

Darstellung der prismatischen Körper.

I. Die in (Fig. 12.) enthaltene Zeichnung stellt das senkrechte dreieckige Prisma anschaulich dar. Das Dreieck bhg ist seine Grundfläche und das ihm congruente Dreieck mon seine Oberfläche. Die Anschauung lehrt, daß jenes mit diesem gleichlaufend

ist. Als Seitenkanten erblickt man die drei Linien mb = oh = ng, deren jede sowohl auf der Grundfläche bhg, als auf der Oberfläche mon senkrecht steht. Man muß sich daher die Winkel mbg, mbh; ohb, ohg; ngb, ngh sowie auch die Winkel bmo, bmn; hom, hon; gno, gnm als rechte Winkel vorstellen.

Die sechs Körperwinkel befinden sich bei m, o und n an der Oberfläche und bei b, h und g an der Grundfläche. Jeder von ihnen ist durch drei ebene Winkel gebildet; der bei m von bmo, bmn und omn; der bei o aus mob, noh und mon; der bei n aus ong, mng und mno; der bei b von mbg, mbh und gbh; der bei h aus ohb, ohg und bhg endlich der bei g aus ngb, ngh und bgh.

Der Kantenwinkel, welcher von den Seitenflächen mohb und nohg gebildet wird, ist sowohl durch den Winkel mon, als durch bhg bestimmt; deßgleichen der von ongh und mngb gebildete Kantenwinkel durch den Winkel mno oder bgh; endlich der durch die Seitenflächen nmbg und ombh erzeugte Kantenwinkel durch den Winkel nmo oder gbh.

Es stellt jedes der vier Seitenparallelogramme mohb, nohg und nmgb ein Rechteck vor, welches auch, in einem besonderen Falle, ein Quadrat seyn kann.

Endlich steht auch jede dieser Umfangsflächen sowohl auf der Grundfläche, als auf der Oberfläche lothrecht.

II. Der Körper bqhamg (Fig. 13.) stellt ein schiefes dreieckiges Prisma vor. Es ist amg seine Grundfläche und bqh seine ihr congruente Ober-

fläche. Die Seitenkanten sind ba = qm = hg und man erkennt sogleich, daß jede von ihnen sowohl auf der Grundfläche als auf der Oberfläche nicht senkrecht, sondern schief steht, und eben darin ist das schiefe dreieckige Prisma von dem lothrechten hauptsächlich unterschieden.

Uebrigens erblickt man auch an diesem Prisma die drei Körperwinkel bei b, q und h an der Oberfläche und bei a, m und g an der Grundfläche. Jeder von ihnen ist auch hier von drei ebenen Winkeln umgränzt, welche man leicht mit Buchstaben benennen kann.

Die Seitenflächen bqma, hqmg und bhga sind Parallelogramme, deren jedes sowohl gegen die Grundfläche, als gegen die Oberfläche schief geneigt ist. Eines von ihnen könnte auch ein Rechteck seyn; die beiden andern aber wären dann zwei Rhomboiden.

Es ist eine zu empfehlende Uebung, sich solche Zeichnungen zu entwerfen, um diese Körper nach mannigfaltigen Verhältnissen ihrer Ausdehnung anschaulich betrachten zu können.

III. In (Fig. 14.) erblickt man ein senkrechtes Parallelopipedum, welches durch dhbampqv, oder kürzer nach den sich gegenüber stehenden Eckpuncten durch dq oder hv bezeichnet wird. Es stellt das Parallelogramm mpqv seine Grundfläche und das ihm parallele, congruente Parallelogramm dhba seine Oberfläche vor. Die geraden Linien av = dm = hp = bq sind seine Seitenkanten, deren jede auf der Grundfläche und Oberfläche senkrecht steht.

Die Anschauung lehrt, daß vier Körperwinkel bei a, d, h und b oben; vier andre aber bei v, m, p

und q sich unten befinden. Jeder derselben ist von drei ebenen Winkeln gebildet, welche nach der genannten Ordnung folgende sind: vab, vad, dab; mda, mdh, adh; phd, pbb, dbb; qba, qbb, abh; avm, avq, mvq; dmv, dmp, vmp; hpm, hpq, mpq; bqp, bqv, vqp.

Dann lehrt die Anschauung, daß die vier Seitenflächen davm, abqv, bbpq und hdmp vier Parallelogramme, und zwar paarweise gegenüberliegend parallel und congruent sind. Auch steht jeder derselben senkrecht auf der Grundfläche wie auf der Oberfläche.

Denkt man sich diesen Körper auf einer seiner Seitenflächen stehend, so erscheint er dem Auge im Ganzen auf ähnliche Weise, denn er ist ringsumher in sechs Parallelogrammen eingeschlossen, deren zwei gegenüberliegende parallel und congruent sind.

Wäre die Grundfläche ein Rechteck, so würde, da auch die vier Seitenflächen Rechtecke seyn müssen, der ganze Körper in sechs Rechtecke eingeschlossen.

Wäre die Grundfläche ein Quadrat, so müßte jedes dieser vier Seitenrechtecke dem andern congruent seyn.

Wäre dann noch eine der auf diesem Quadrate lothrecht stehenden Seitenkanten der Seite dieses Quadrates gleich, so würde das Parallelopipedum zum Würfel, welcher daher, wie schon früher bemerkt worden ist, als eine Gattung der Parallelopipeden, oder noch allgemeiner als eine Gattung der viereckigen Prismen betrachtet werden kann.

IV. Die Zeichnung dahgmnqp (Fig. 15.) stellt ein schiefes Parallelopipedum dar, dessen

Grundfläche das Parallelogramm mnqp und dessen Oberfläche das ihm congruente dahg ist.

Man erkennt diesen Körper sogleich daran, daß seine vier Seitenkanten dm = gp = hq = an sowohl auf der Grundfläche, als auf der Oberfläche schief stehen. Eben dieses gilt auch von den vier Seitenflächen, deren zwei gegenüberliegende ebenfalls einander parallel und congruent sind.

Die vier Körperwinkel an der Oberfläche liegen bei d, a, h und g, und an der Grundfläche bei m, n, q und p, und es ist überhaupt klar, daß alles andere an diesem Körper auf ähnliche Art nachgewiesen werden kann, wie bei dem senkrechten Parallelopipedum.

Auch lehrt die Anschauung, daß zwei einander gegenüberstehende Seitenflächen z. B. danm und ghqp auf der Grundfläche mnqp und auf der Oberfläche dhag senkrecht stehen können; daß aber die beiden andern dgpm und ahqn immer schief gegen sie geneigt sind. Aber es können auch, wie vorhin bemerkt wurde, die sämmtlichen vier Seitenflächen einen schiefen Stand auf den beiden Grundflächen haben.

Wollte man diesen Unterschied, welcher im Ganzen nicht unwesentlich ist, durch besondere Worte ausdrücken, so könnte man jene Parallelopipeden einfach-schiefe, diese aber doppelt-schiefe nennen.

Daß die Grundfläche schiefer Parallelopipeden auch ein Rechteck oder ein Quadrat seyn könne, versteht sich von selbst.

V. Alle Parallelopipeden sind viereckige Prismen, aber nicht umgekehrt. Daher stellt adcbfghq (Fig. 16.) ein senkrechtes viereckiges Prisma vor,

welches kein Parallelopipedum ist. Die Grundfläche qfgh ist kein Parallelogramm, daher auch die einander gegenüberliegenden Seitenflächen hier nicht so, wie bei den Parallelopipeden einander congruent seyn können.

Da die Oberfläche adcb parallel mit der Grundfläche ist, so erscheinen die Seitenkanten aq = df = cg = bh hier auf beiden Flächen senkrecht stehend.

Die vier Seitenflächen sind zwar Rechtecke, nämlich adfq, dcgf, cbhg und abhq, allein nicht congruent unter sich, obwohl man leicht erkennt und durch eine Zeichnung erläutern kann, daß zwei, ja sogar auch drei an einander liegende Seitenflächen congruente Rechtecke seyn können.

Jeder der vier Körperwinkel an der Oberfläche bei a, d, c und b und jeder der vier Körperwinkel an der Grundfläche bei q, f, g und h ist von drei ebenen Winkeln gebildet; so, daß im Ganzen vier und zwanzig solcher Winkel besonders betrachtet und durch Buchstaben benennt werden können, was zur Uebung dienet. Auch kann man die vier Kantenwinkel betrachten, welche durch die vier Winkel bad, adc, dcb und cba bestimmt werden. Jeder der vier Seitenflächen steht hier senkrecht auf Grund- und Oberfläche.

VI. Der Körper dcbhamng (Fig. 17.) stellt das schiefe viereckige Prisma im Allgemeinen dar. Seine vierseitige Grundfläche amng, congruent der Oberfläche dcbh, ist kein Parallelogramm, sondern entweder ein Paralleltrapez oder ein gewöhnliches Trapez.

Seine Seitenkanten da, cm, bn und hg sind zwar unter sich einander gleich, stehen aber schief auf der Grund- und Oberfläche. Seine vier Seitenflächen dhga, hbng, bcmn, cdam sind zwar Parallelogramme, haben aber ebenfalls eine schiefe Neigung gegen die Grund- und Oberfläche. Auch kann man die Körperwinkel bei d, c, b, h und bei a, m, n und g betrachten, sowie auch die verschiedenen ebenen Winkel, welche dieselben bilden.

Daß eine seiner Seitenflächen ein Rechteck, ja sogar ein Quadrat seyn könne, läßt sich ebenfalls durch die Anschauung erkennen.

VII. Ganz auf ähnliche Weise könnte man auch das fünfeckige Prisma, als ein senkrechtes oder schiefes, durch die Zeichnung darstellen und seine einzelnen Theile besonders betrachten, was als Uebung im geometrischen Zeichnen zu empfehlen ist.

Ueberhaupt ist klar, daß irgend ein vieleckiges Prisma durch eine ihm entsprechende Zeichnung dargestellt werden kann und daß jedes Prisma überhaupt noch einmal so viele Körperwinkel habe, als seine Grundfläche Seiten hat; in dem n eckigen Prisma sind also 2 n Körperwinkel und, da jeder derselben durch drei ebene Winkel gebildet wird, so bietet das n eckige Prisma $3 \times 2n = 6n$ verschiedne ebene Winkel dar.

Im Allgemeinen kann man sagen: ein vieleckiges Prisma ist jener Körper, der von irgend einem geradlinigen Vielecke als Grundfläche, von einem ihm congruenten, parallelen Vielecke als Oberfläche und von so vielen Seitenparallelogrammen eingeschlossen wird, als seine Grundfläche Seiten hat.

VIII. Von den eckigen prismatischen Körpern geht man am natürlichsten zu den rundlichen über. So stellt ghdqantm (Fig. 18.) einen senkrechten Cylinder dar, der Kreis antm ist seine Grundfläche, der ihm congruente parallele Kreis ghdq seine Oberfläche, b der Mittelpunct in jener, und c der Mittelpunct in dieser; die gerade Linie cb erscheint als eine Achse, welche hier, der Anschauung gemäß, auf den beiden Kreisflächen senkrecht steht, weßhalb dieser Cylinder eben ein senkrechter Cylinder genennt wird.

Denkt man sich diesen Körper von einer Ebene durchschnitten, welche längs der Achse cb und durch die Puncte g und d sich erstreckt, so entsteht das Rechteck gdta als Durchschnittsfläche und man erkennt, daß dt = ga, als Seite dieses Cylinders, zugleich auch seiner Achse cb gleich ist, auch daß cb das ganze Rechteck gdta in zwei congruente Hälften gcba und dcbt theilt.

Da immer das nämliche Rechteck aus dem Durchschnitte dieses Cylinders entsteht, wenn gleich derselbe nach einer andern Richtung, jedoch immer längs der Achse, durchschnitten wird, so erkennt man hieraus, wie dieser senkrechte Cylinder dadurch entstehen kann, daß sich das Rechteck dcbt um die unbewegliche Achsenlinie cb einmal ganz und gar herum bewegt. Die Linie bt beschreibt hierdurch die Grundfläche, cd die Oberfläche und dt die krumme Seitenfläche dieses Cylinders, welche eben deßhalb nur eine einfach gekrümmte ist, weil ihre Krümmung nur durch die Seitenbewegung der geraden Linie dt entsteht.

Man nennt den senkrechten Cylinder auch eine Walze, von der walzenden Bewegung, welcher er fähig ist, wenn man ihn mit seiner Seite in eine Ebene legt und in derselben fortrollt. Wird er hier so lange herumbewegt, bis dieselbige Seite wiederum mit der Ebene in Berührung kömmt, so ist seine krumme Seitenfläche einem Rechtecke gleich geworden, dessen eine Seite der Seite des Cylinders, die andere aber der Peripherie seiner Grundfläche gleich ist.

Gleichwie in der Planimetrie der Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von sehr vielen Seiten betrachtet wird, so läßt sich nunmehr auch der senkrechte Cylinder als ein Prisma von sehr vielen Ecken betrachten. Was dort die sehr kleinen Polygonseiten für den Umfang des Kreises sind, das stellen hier die vielen, äusserst schmalen Rechtecke als seine Seitenflächen dar.

IX. Die Zeichnung bdhg (Fig. 19.) stellt einen schiefen Cylinder dar, f ist der Mittelpunct seiner Grundfläche, a jener der Oberfläche; fh, fg, ad, ab sind die Halbmesser, gh und bd die Durchmesser dieser Flächen.

Wird von a nach f eine gerade Verbindungslinie gezogen, so stellt sie seine Achse vor, und da diese, wie die Anschauung lehrt, auf der Grund- und Oberfläche schief steht, so wird dieser Cylinder eben deßhalb ein schiefer genennt.

Wenn man diesen Cylinder durch die Puncte b, f und d, welche die Ebene eines Dreiecks bilden, durchschneidet, so entsteht die Figur bdhg, welche ein schiefes Parellelogramm ist und aus den zwei congruenten Theilen bafg und dafh besteht. Man erkennt

bg und dh als Seiten dieses Cylinders, welche auch hier als gerade Linien von gleicher Größe erscheinen.

Würde der Cylinder nach der Richtung qap geschnitten, so entstände durch diesen Achsenschnitt das Parallelogramm mnpq, worin ebenfalls np = mq = af und afpn = afqm ist; so, daß man auch bei dem schiefen Cylinder immer die nämliche Seite erhält.

Wenn die Durchschnittslinie mn lothrecht auf bd steht, wodurch auch qp senkrecht auf gh ist, so lehrt die Anschauung, daß die aus dem Durchschnitte des Körpers entstehende Fläche ein Rechteck sei.

Hieraus folgt schon, daß der schiefe Cylinder nicht durch die Umdrehung des Parallelogramms dafh um die Achse af, oder durch die Umdrehung von mafq um ebendiese Linie af entstehen kann, da der Winkel daf größer als der Winkel naf ist. Man kann sich dieses dadurch anschaulich machen, daß irgend eine Rhomboide um eine ihrer Seitenlinien als feststehende Achse gedreht wird.

Man kann sich daher die Entstehung des schiefen Cylinders dadurch aufklären, daß die Grundfläche gqhp in paralleler Lage sich mit ihrem Mittelpuncte f durch die Linie fa aufwärts bewegt, wobei die Peripherie der Grundfläche die krumme Fläche beschreibt, welche den schiefen Cylinder umschließet.

Wollte man den schiefen Cylinder mit seiner Seite in eine Ebene legen und ebenfalls einmal ganz und gar in derselben herumbewegen, so würde zwar seine krumme Seitenfläche auf derselben gleichsam abgewickelt werden; aber diese Fläche bildet hier kein Rechteck, wie bei dem senkrechten Cylinder, sondern

eine Figur, welche von zwei parallelen und gleichen geraden Linien, und von zwei krummen Seitenlinien eingeschlossen wird.

Gleichwie der senkrechte Cylinder als ein senkrechtes Prisma von sehr vielen Ecken betrachtet werden kann, so zeigt sich auch der schiefe Cylinder als einen sehr vieleckigen, schiefen prismatischen Körper.

Ueberhaupt folgt hieraus, daß die Cylinder ebenfalls als prismatische Körper zu betrachten sind, welche die unendlich mannigfaltige Reihe vom dreieckigen Prisma bis zum unendlich eckigen vollkommen abschließen.

An diese prismatischen Körper reihen sich nun am einfachsten die pyramidalischen, welche auf ähnliche Weise zu betrachten sind.

§. 2.

Darstellung der pyramidalischen Körper und der Kugel.

I. Es sey abg (Fig. 20.) ein gleichseitiges Dreieck, n sein Mittelpunct und nd ein aus diesem Puncte auf das Dreieck abg errichtetes Loth. Denkt man sich nun die geraden Linien da, db, dg, so ist der Körper dagb eine senkrechte dreieckige Pyramide.

Das Dreieck agb ist seine Grundfläche, der Punct d seine Spitze, und die lothrechte Linie dn seine Achse.

Als Seitenflächen dieser Pyramide erkennt man die Dreiecke dag, dgb und dba, welche hier ebenfalls einander congruent sind.

Der Körperwinkel bei d ist von den drei ebenen Winkeln adg gdb und bda, jener bei a von den

Winkeln dag, dab und gab, jener bei g von den Winkeln dga, dgb und agb, jener bei b von den Winkeln dba, dbg und abg gebildet.

Als sechs Seitenkanten erscheinen die Linien da = dg = db und ag = gb = ba.

Auch sind die drei genannten Seitenflächen gleichschenkelige Dreiecke.

Man sieht sogleich, daß die wissenschaftliche Entstehung dieser Pyramide von der Errichtung des Lothes nd abhängig sei; sowie auch, daß die ganze Pyramide aus drei unter sich vollkommen congruenten Pyramiden besteht, wenn man von n die geraden na, nb und ng zieht. Auch kann man auch an diesen Körpern die eben bemerkten Anschauungen betrachten.

II. Der Körper dacg (Fig. 21.) stellt eine schiefe dreieckige Pyramide dar, acg ist ihre Grundfläche, d ihre Spitze, da, dc, dg, ac, cg, ga sind ihre sechs Seitenkanten, dac, dcg und dga ihre drei Seitenflächen. Ihre vier Körperwinkel liegen bei d, a, g und c, und jeder derselben ist von drei Seitenwinkeln gebildet, welche leicht benennt werden können.

Weil das von d auf acg gefällte Loth dm nicht in die Mitte der Grundfläche fällt, auch die drei Seitenkanten da, dc und dg einander ungleich sind, so ist diese Pyramide eine schiefe.

Man kann auch jede andere Seitenfläche als ihre Grundfläche betrachten, wo denn der Scheitelpunct des ihr gegenüberliegenden Körperwinkels ihre Spitze genennt wird.

Auch könnte man noch den Kantenwinkel betrachten, welcher durch je zwei an einer gemeinsamen Kante liegenden Durchschnittsebenen gebildet wird und deren es nach der Zahl der sechs Kantenlinien ebenfalls sechs geben muß.

Die wirkliche Entstehung einer schiefen dreieckigen Pyramide kann hier schon überzeugend nachgewiesen werden.

Wenn man oberhalb der Ebene des Dreiecks acg einen beliebigen Punct d annimmt, von ihm nach einem Winkelpuncte der Grundfläche die gerade da zieht und über a nach f willkührlich verlängert, so kann man sich vorstellen, es werde diese Linie df, mit dem Endpuncte d unbeweglich bleibend, dergestalt um das Dreieck acg herumgeführt, daß sie seine Seiten ac, cg, ga immer berührt, wodurch jede der drei Seitenflächen dac, dcg und dga, und durch diese die Pyramide selbst beschrieben wird.

III. Die senkrechte viereckige Pyramide wird durch caqmd (Fig. 22.) dargestellt, worin cmqa irgend ein Rechteck, n seinen Mittelpunct und nd ein willkührliches, auf der Grundfläche stehendes Loth bezeichnet. Dier vier gleich großen Seitenkanten da, dq, dm und dc bilden die vier gleichschenkeligen Dreiecke adq, qdm, mdc und cda, welche, wenn die Grundfläche ein Quadrat ist, alle unter sich congruent sind, da bei einem Rechtecke nur die gegenüberliegenden es seyn können.

Der bei d befindliche Körperwinkel wird hier von vier Seitenwinkeln gebildet, welche leicht mit Buchstaben benennt werden können, sowie auch die ebenen

Winkel, welche die Körperwinkel an der Grundfläche umschließen.

Es ist klar, daß die wissenschaftliche Entstehung dieser Pyramide wiederum von der aus n auf caqm zu errichtenden senkrechten Linie abhänge; auch, daß man die ganze Pyramide in vier Theilpyramiden zerlegen könne, wenn die Linie nc, na, nq, nm gezogen würden.

IV. Auf ähnliche Weise stellt danhg (Fig. 23.) eine schiefe viereckige Pyramide dar, welche man sogleich daraus erkennt, daß die Seitenkanten da, dn, dh und dg, so wie auch die Seitenflächen dan, dnh, dhg und dga mit der Grundfläche ungleiche Winkel bilden.

Den bei d befindlichen, aus vier ebenen Winkeln gebildeten Körperwinkel, hat diese schiefe Pyramide mit der senkrechten viereckigen gemein, sowie auch die von drei ebenen Winkeln begränzten Körperwinkel bei a, n, h und g.

Die Entstehung dieses Körpers kann leicht dadurch nachgewiesen werden, daß man sich ausserhalb der viereckigen Grundfläche aghn einen Punct d, durch d und a die willkührliche gerade Linie dam vorstellt und dieselbe nun um den festen Punct d und um sämmtliche Umfangslinien der Grundfläche einmal herumbewegt. Hierdurch beschreibt diese sich seitwärts drehende Linie die vier Dreiecke, welche dem Körper zur Gränzfläche dienen.

V. Ganz auf ähnliche Weise verhält es sich nun auch mit den mehreckigen senkrechten und schiefen Pyramiden. Jene entstehen dadurch,

daß aus der Mitte irgend eines geradlinigen regelmäßigen Vielecks ein willkührliches Loth auf seine Ebene errichtet und jeder Winkelpunct desselben mit dem Endpuncte des Lothes durch eine gerade Linie verbunden wird. Man erkennt sogleich, daß die Entstehung dieser Pyramiden hier nicht eher wissenschaftlich dargestellt werden kann, bis die Construction der senkrechten Linie auf eine Ebene befriedigend nachgewiesen worden ist.

Die Entstehung vieleckiger schiefer Pyramiden kann aber hier gerade auf jene Weise befriedigend erkannt werden, wie dieses kurz zuvor bei der schiefen viereckigen Pyramide geschehen ist.

Auch folgt aus dem Bisherigen, daß eine Pyramide überhaupt jener Körper sei, welcher von irgend einer geradlinigen vieleckigen Figur als Grundfläche und von sovielen Seitendreiecken eingeschlossen wird, als diese Grundfläche Seiten hat.

VI. In der Zeichnung cambn (Fig. 24.) erblickt man den senkrechten Kegel. Der Kreis ambn heißt seine Grundfläche, o dessen Mittelpunct und oa dessen Halbmesser. Die gerade Linie, welche von der Spitze c nach diesem Mittelpuncte o gezogen wird, steht hier senkrecht auf ihr, und darum wird auch dieser Kegel ein senkrechter oder ein lothrechter genennt.

Denkt man sich denselben durch die Puncte a, c und b von einer Ebene längs der Achse co geschnitten, so entsteht das gleichschenkelige Dreieck acb, welches auch das Achsendreieck genennt wird, und, wie man sieht, aus den zwei congruenten rechtwinkeligen Dreiecken coa und cob gebildet wird.

Denkt man sich eines derselben z. B. das Dreieck coa um seine feste, unbewegliche Linie co einmal herumgedreht, so beschreibt die Cathete oa den Kreis der Grundfläche, die Hypotenuse ca aber die krumme Seitenfläche dieses Kegels, welche, weil sie aus der Seitenbewegung einer geraden Linie entsteht, auch nur eine einfach gekrümmte Fläche seyn kann. Jede Linie wie ca, cb und dergleichen heißt bekanntlich die Seite des Kegels.

Wird der senkrechte Kegel dhngm (Fig. 25.) durch die Puncte n, d und m von einer Ebene längs der Achse db geschnitten, so entsteht das Achsendreieck ndm, welches ebenfalls gleichschenkelig und dem vorigen Achsendreiecke hdg congruent ist. Weil nun durch jeden Achsenschnitt immer das nämliche Dreieck entsteht, so wird auch der senkrechte Kegel ein gleichseitiger genennt, denn es ist überall dh = dn = dg = dm.

Denkt man sich den Kegel von einer Ebene nach vw, parallel mit der Grundfläche, durchschnitten, so lehrt die Anschauung, was aber die Wissenschaft erst in der Folge beweisen muß, daß die Durchschnittsfläche ebenfalls ein Kreis ist. Es wird hierdurch der ganze Kegel in zwei Stücke getheilt, wovon dvw ein kleinerer senkrechter Kegel ist; das Stück vwgh aber ein abgekürzter Kegel genennt wird.

Schnitte man den senkrechten Kegel nach einer andern, mit seiner Grundfläche nicht parallelen Richtung, so entstände auch kein Kreis, sondern eine andere Figur, welche in der höheren Geometrie genauer betrachtet und entweder eine Ellipse oder Parabel oder Hyperbel genennt wird.

VII. Der schiefe Kegel wird durch die Zeichnung dhmgn (Fig. 26.) dargestellt. Es ist der aus dem Mittelpuncte c mit dem Halbmesser ch beschriebene Kreis hmgn seine Grundfläche, d seine Spitze und dc seine Achse, welche, wie die Anschauung lehrt, auf der Grundfläche schief steht.

Wird dieser Kegel durch die Endpuncte des Durchmessers h und g und durch die Spitze d von einer Ebene längs der Achse dc geschnitten, so entsteht das Achsendreieck hdg, worin dh und dg ungleich sind.

Die Entstehung dieses schiefen Kegels wird daraus begreiflich, daß man sich irgend einen Kreis hmgn, ausserhalb seiner Ebene einen beliebigen Punct d und von ihm eine gerade Linie dhq denkt, welche seine Peripherie in h berührt. Wird nun diese, bei d immer unbewegliche Linie rings um die Peripherie, in steter Berührung mit ihr, geführt, so entsteht eine krumme, nur einseitig gekrümmte Fläche als Seitenfläche des Kegels.

Schneidet man diesen Kegel mit einer Ebene nach der Richtung qp mit hg gleichlaufend, so entsteht auch hier ein Kreis als Durchschnittsfigur, welcher kleiner oder größer ist, je nachdem der Durchschnitt näher bei der Spitze oder näher bei der Grundfläche statt hat.

Wenn man den schiefen Kegel bda (Fig. 27.) nach einer Richtung durchschneidet, welche durch die Puncte n, b und m geht, wobei angenommen wird, daß nm als Durchmesser der Grundfläche auf dem Durchmesser da lothrecht steht, so entsteht das Achsendreieck nbm, worin ebenfalls nb = mb ist; aber es ist klar,

daß diese Gleichseitigkeit des Achsendreiecks auch nur in diesem einzigen Falle statt findet, und daß seine Seiten am meisten unter sich verschieden sind, wenn der Durchschnitt durch die Puncte d, b und a geschieht.

Gleichwie die vieleckigen Prismen sich den Cylindern immer mehr annähern; so, daß man den Cylinder als einen prismatischen Körper von unendlich vielen Ecken ansehen kann, so können auch nunmehr die Kegel als Pyramiden von unzählig vielen Seiten betrachtet werden. Es gehören demnach alle kegelförmigen Körper, sie mögen was immer für krummlinige Grundflächen haben, zur Klasse der Pyramiden.

Daher theilen sich alle bisher betrachteten stereometrischen Körper in zwei Hauptgattungen, in jene der prismatischen und jene der pyramidalischen ab, und aus gleichem Gesichtspuncte müssen sie auch in der stereometrischen Wissenschaftslehre betrachtet werden.

VIII. Wenn der aus c (Fig. 28.) mit cd beschriebene Kreis dbga sich um den Durchmesser dg als unbewegliche Achsenlinie einmal ganz und gar herumbewegt, bis er wieder in seine erste Lage zurückkehrt, so beschreibt seine halbe Peripherie dbg eine krumme, in sich selbst zurücklaufende Fläche, welche die **Kugelfläche** genennt wird, innerhalb welcher sich der körperliche **Kugelraum** befindet. Auch könnte man sich den ganzen Kreis dbga um den Durchmesser dg nur zur **Hälfte umgedreht** vorstellen, wodurch ebenfalls die Kugelfläche und der Kugelraum beschrieben würde.

Diesen Kreis, aus dessen Umdrehung die Entstehung der Kugel erkannt wird, nennt man den er-

zeugenden Kreis, seinen Mittelpunct c den Mittelpunct der Kugel, sowie auch cd der Halbmesser und gd der Durchmesser für den Kreis und die Kugel gemeinschaftlich ist.

Wird auf den Durchmesser dg der Durchmesser ba lothrecht errichtet, so nennt man die Puncte b und a die Pole der Kugel und die Verbindungslinie ba ihre Achse.

Denkt man sich diese Kugel von einer Ebene durch den Mittelpunct so geschnitten, daß auf ihrer Richtung dcg der Durchmesser ba lothrecht steht, so bildet die Durchschnittsfigur einen Kreis dhgv, welcher der größte Kreis der Kugel genennt wird und von dessen Peripheriepuncten die Pole b und a überall gleichen Abstand haben.

Schneidet man die Kugel nicht durch den Mittelpunct, z. B. nach der Richtung mon, so entsteht ebenfalls ein Kreis, welcher, wie die Anschauung lehrt, um so kleiner wird, je weiter die schneidende Ebene vom Mittelpuncte entfernt ist.

Wäre die Lage der schneidenden Linie mn mit dem größten Kreise um dg gleichlaufend, so nennte man diesen Kreis um mn, in Bezug auf jenen um dg, einen Parallelkreis, dessen Peripheriepuncte von dem Pole b, sowie auch vom Pole a gleiche Entfernung haben.

Jenes Stück des Kugelraumes, welches von dem größten Kreise um dg und dem dazu gehörigen Theile der Kugelfläche dbg begränzt wird, heißt die Halbkugel, und jeder größte Kreis muß die Kugel in zwei Hälften theilen.

Wird aber die Kugel nicht durch den Mittelpunct und z. B. nach mn durchschnitten, so heißt jenes Stück von ihr, welches von dem Kreise um mn und von der Kugelfläche mbn eingeschlossen ist, ein Kugelabschnitt. Es ist klar, daß noch ein zweiter Abschnitt entsteht, welcher von dem nämlichen Kreise um mn und von der Kugelfläche man eingeschlossen wird; so, daß beide Abschnitte zusammen wiederum die ganze Kugel bilden. Die Entstehung des kleineren Abschnittes läßt sich auch dadurch erkennen, daß die ebene Figur bom sich um bo als Achse einmal herumbewegt, sowie der größere Abschnitt durch die Umdrehung der ebenen Figur omda um die Achsenlinie oa erzeugt wird.

Denkt man sich den Kreisausschnitt mcb und nimmt an, er werde um den feststehenden Radius cb einmal herumbewegt, so entsteht ein Körper mbnc, welchen man Kugelpyramide nennt. Man sieht leicht, daß er aus dem Kugelabschnitte mbn und aus einem senkrechten Kegel besteht, welcher durch die Umdrehung des rechtwinkeligen Dreiecks moc um oc gebildet wird. Diese Kugelpyramide ist das für die Kugel, was der Kreisausschnitt für den Kreis ist.

Auch wird man sich jenen Körper vorstellen können, welcher übrig bleibt, wenn die Kugelpyramide mcnb von der Halbkugel dbg weggenommen wird.

Noch lassen sich solche Theile der Kugel angeben, welche entstehen, wenn zwei Parallelebenen die Kugel durchschneiden und ein körperliches Stück zwischen sich fassen, oder wenn die schneidenden Ebenen nicht mit einander parallel sind. In beiden Fällen kann

man auch jenen Theil der Kugelfläche betrachten, welcher diesen Kugelstücken zur Seitenfläche dienet.

§. 3.

Gleichheit, Aehnlichkeit und Congruenz der Körper.

I. Man kann weder die Aehnlichkeit, noch die Congruenz der Körper mit Klarheit erkennen, wenn man von der Gleichheit der Körperwinkel keine anschauliche Vorstellung hat. Daher ist der Begriff des Deckens der Körperwinkel vor Allem zu erläutern.

Zwei Körperwinkel decken einander, wenn man den einen so in den andern bringen kann, daß ihre Scheitelpuncte, ihre sämmtlichen Seitenkanten, sowie auch ihre Seitenflächen paarweise in einander fallen. In diesem Falle werden sie nicht mehr zwei verschiedene, sondern nur einen einzigen Körperwinkel bilden.

Man kann dieses dadurch erläutern, daß man sich in einer Ebene zwei rechte Winkel und von dem Scheitelpuncte eines jeden ein Loth auf ihre Ebene errichtet denkt. Hier entstehen zwei körperliche Winkel, deren jeder von drei rechten Winkeln begränzt ist, und man überzeugt sich bald, daß beide so ineinander gestellt werden können, daß sie nur einen einzigen bilden.

Hieraus folgt, daß die Seitenkanten solcher, sich deckenden Körperwinkel eben nicht immer mit ihrer ganzen Länge in einander fallen müssen, da die Größe

eines Körperwinkels, wie auch bereits früher bemerkt wurde, so wenig von der Länge seiner Seitenkanten, als die Größe eines ebenen Winkels von der Länge seiner Schenkel abhängt.

Eine besondere Art von Körperwinkeln, welche man symmetrische nennt, wird weiter unten näher betrachtet werden.

II. Man nennt stereometrische Körper unter sich gleich, wenn sie einerlei körperlichen Raum einnehmen, aber verschieden an Gestalt sind; so, daß der eine Körper nicht in den andern dergestalt gestellt werden kann, daß beide einen einzigen bildeten. Diese Gleichheit der Körper besteht also in einer Uebereinstimmung ihrer Größe bei abweichenden Formen.

Auch läßt sich dieser Begriff der Gleichheit an einem wirklichen Körper anschaulich erläutern. Es werde das Parallelopipedum bm (Fig. 29.) von einer Ebene, welche durch die Mitte der Seitenkante tr, d. h. durch q geht, parallel mit der Grundfläche vm geschnitten, so lehrt die Anschauung, daß das obere Stück bd dem unteren Stücke cm vollkommen congruent sei, d. h. daß das obere in das untere so gestellt werden könne, daß beide nur einen einzigen Körper bilden. Wird nun dieses obere Stück bd mit seiner Seitenfläche btqc an die ihr congruente Seitenfläche hdms gestellt, so entsteht ein neues Parallelopipedum cw, welches mit dem zuerst gegebenen bm denselbigen Körperraum, nicht aber die nämliche Gestalt gemein hat. Auch kann dieser Begriff von der Gleichheit körperlicher Räume durch den Durchschnitt anderer Körper anschaulich erläutert werden.

Die eigentliche Wissenschaft wird weiter unten die Bedingnisse nachweisen, unter welchen Körper von ganz verschiedenen Gestalten, z. B. ein dreieckiges Prisma und eine vierseitige Pyramide, oder ein Parallelopipedum und ein Kegel u. s. f. einander gleich sind.

III. Die Aehnlichkeit der Körper besteht darin, daß sie an Gestalt vollkommen übereinstimmend und nur an Größe verschieden sind. Zur Erläuterung dient eine Kugel von größerem und eine andere von kleinerem Durchmesser, oder die Betrachtung zweier Würfel, deren Seitenkanten verschieden sind. Der größere Würfel stimmt in seiner Gestalt mit dem kleineren vollkommen überein und ist nur durch sein Größerseyn von ihm verschieden.

Dieser Begriff der Aehnlichkeit läßt sich noch näher erläutern. Es werde die dreieckige Pyramide dapq (Fig. 30.) in dem Puncte g durch eine Ebene mit der Grundfläche gleichlaufend geschnitten, so entsteht als Durchschnittsfläche das Dreieck gmn, welches, wie man beweisen muß, dem Dreiecke apq ähnlich ist. Deßgleichen sind die Dreiecke dgm und dap, dmn und dpq, dgn und daq einander ähnlich. Auch ist der Körperwinkel bei g jenem bei a, der bei m jenem an p und der an n jenem bei q vollkommen gleich. Endlich bilden die Linien gd und dm, ad und dp, md und dn, pd und dq, gd und dn, ad und dq u. s. f. alle übrigen übereinstimmend liegenden Kantenlinien allerwärts gleiche Verhältnisse.

Daher hat die kleine Pyramide dgmn mit der größeren dapq alles gemein, was irgend einen Ein-

fluß auf die Bestimmung der Gestalt äussert und beide Pyramiden sind somit einander ähnlich.

Wenn man irgend eine andere Pyramide oder einen Kegel parallel mit der Grundfläche schneidet, so entsteht ebenfalls in dem abgeschnittenen Körper ein solcher, welcher dem Ganzen ähnlich ist, wobei sich von selbst versteht, daß man hier nur jenes abgeschnittene Stück sich denkt, welches mit dem ganzen Körper die Spitze gemein hat.

Es folgt hieraus, daß auch dieser Begriff von ähnlichen Körpern hier eine bloße Worterklärung sei, da es eine Hauptaufgabe der stereometrischen Wissenschaft ist, die Bedingungen überzeugend zu entwickeln, auf welchen die Aehnlichkeit der Körper beruht.

IV. Die Congruenz der Körper besteht daher in ihrer Uebereinstimmung an Größe und Gestalt, und geht somit auch hier aus Vereinigung der Gleichheit mit der Aehnlichkeit hervor, wie dieses bereits in der Planimetrie bei den ebenen Figuren der Fall war.

Zwei Würfel von gleichen Seitenkanten sind als congruente Körper zu betrachten, da der eine dergestalt in den Raum des andern gestellt werden kann, daß beide nur einen einzigen bilden.

Auch müssen zwei Kugeln von gleichen Duchmessern als congruente Körper betrachtet werden, da die eine den Raum der andern ganz genau ausfüllt, und beide somit nur eine einzige bilden.

§. 4.

Uebungs-Fragen.

I. Wie wird ein senkrechtes dreieckiges Prisma durch Zeichnung dargestellt? Angabe dessen, was die Anschauung daran erkennt? Eben dieses für das schiefe dreieckige Prisma? Darstellung des senkrechten Praralelopipedums durch die Zeichnung? Auch des schiefen und des Würfels? Was zeigt die Anschauung an ihnen? — Zeichnung des senkrechten und schiefen viereckigen Prismas? Darstellung mehrseitiger, lothrechter und schiefer Prismen? Erklärung des eckigen Prisma überhaupt? — Darstellung des senkrechten Cylinders durch Zeichnung; auch des schiefen, nebst Benennung ihrer Theile? Was entsteht, wenn eckige oder runde prismatische Körper durch Ebenen geschnitten werden? Wie entstehen diese Körper im Allgemeinen und im Besondern? (§. I.)

II. Darstellung der senkrechten dreieckigen Pyramide, auch der schiefen? Anschauungen an denselben? Eben dieses für die viereckigen, fünfeckigen, vieleckigen Pyramiden? Ihre Entstehung? Darstellung des senkrechten Kegels, des schiefen und ihrer Anschauungen? auch des abgekürzten Kegels und der abgekürzten Pyramide? Welche Figuren entstehen aus den Durchschnitten dieser Körper? — Darstellungen der Kugel? Anschauungen an derselben? Darstellung des Abschnitts, Ausschnitts, der Kugelzone, des Zonenstücks? (§. 2.)

III. Wie wird das Decken der Körperwinkel durch die Anschauung erläutert? Wann sind Körper gleich? Erläuterung durch anschauliche Beispiele? Was ist die Aehnlichkeit der Körper? Erläuterung durch Anschauung? Worin besteht die Congruenz der Körper? Erläuterung durch Anschauungen? Welche von diesen Erklärungen sind Sach, welche bloße Wort-Erklärungen? — Allgemeine Uebersicht

der bisher entwickelten stereometrischen Anschauungslehre? Uebergang zur Wissenschaftslehre? (§. 3.)

Vierter Lehrgang.

Wissenschaftliche Vorbereitungslehren von der Lage der Ebenen und Linien, gegen Ebenen.

I. Lehrübung.

Wissenschaftliche Bestimmung der Lage gerader Linien, welche auf Ebenen aufgestellt sind.

§. 1.

Allgemeine stereometrische Grundsätze und Grundbegriffe.

I. Es ist bereits aus den Grundlehren der Planimetrie bekannt, daß sich der allgemeine Raum nach drei Hauptrichtungen hin ins Unendliche erstreckt, welche man mit den Worten Länge, Breite und Tiefe bezeichnet. Ebenso bekannt ist es, daß man diesem annoch unbegränzten Raume ringsumher eine allseitige Gränze geben und hierdurch einen geometrischen Körper aus ihm bilden könne. Als allseitige Gränze dieses Körpers erscheint die Fläche, woran man nur zwei Hauptrichtungen, nach Länge und Breite erkennt.

Daß diese Flächen theils einseitig, theils allseitig gekrümmte sind, ist ebenfalls aus dem Bisherigen zur Genüge bekannt.

Als Gränze der Flächen erscheinen die Linien, woran man nur eine einzige Ausdehnung nach der Länge erkennt und welche theils gerade, theils krumme sind.

Die Gränzen der Linien denkt man sich als Puncte, d. h. als etwas, woran durchaus keine weitere Ausdehnung erkennbar ist, weil sie die Gränze jeder Ausdehnung bilden. Der Begriff des Punctes ist somit ein negativer, da er nur die Abwesenheit irgend einer räumlichen Ausdehnung bezeichnet.

Auch ist klar, daß der Durchschnitt zweier Flächen eine Linie, sowie der Durchschnitt zweier Linien einen Punct bildet. Daher kann man in jeder Ebene nach Gefallen Linien, sowie auch in jeder Linie nach Belieben Puncte annehmen.

II. Als fernere Grundsätze bemerke man folgende:

Wenn irgend ein allseitig begränzter körperlicher Raum von einer Ebene geschnitten wird, so ist der Durchschnitt eine ebene Figur, welche theils geradlinig, theils krumm- oder gemischtlinig seyn kann.

Wenn zwei einfach gekrümmten Flächen einander schneiden, so ist der Durchschnitt entweder eine gerade oder eine krumme Linie. Jenes kann statt haben, wenn sich zwei Cylinderflächen einander gehörig durchschneiden. Das letztere tritt aber ein, wenn entweder die beiden Durchschnittsflächen doppelt gekrümmt sind, wie z. B. bei zwei sich schneidenden Kugelflächen, oder wenn die eine von ihnen eine einfache und die andere eine doppelte Krümmung hat, wie dieses z. B. bei dem Durchschnitte einer Kugelfläche und einer Cylinderfläche der Fall wäre.

Wird eine krumme Fläche von einer Ebene geschnitten, so kann der Durchschnitt, wenn die Fläche einfach gekrümmt ist, theils eine gerade, theils eine krumme Linie seyn; bei einer doppelt gekrümmten Fläche aber muß der Durchschnitt immer krummlinig seyn.

Der Durchschnitt zweier Ebenen ist immer geradlinig, da sich in keiner von beiden irgend etwas Gekrümmtes befindet. Daher kann man in jeder Ebene zwei beliebige Puncte wählen, und die gerade Linie zwischen beiden wird ganz in diese Ebene fallen. Auch kann jeder von zwei geraden Linien gebildete Winkel so in eine Ebene gelegt werden, daß er ganz und gar in sie hineinfällt. Denn wenn man einen seiner Schenkel in diese Ebene legt und nun den ganzen Winkel um denselben, als feste Achsenlinie, so lange herumbewegt, bis der Endpunct des andern Schenkels auch in diese Ebene fällt, so muß dieser ganze Schenkel, da er zwei Puncte mit der Ebene gemein hat, durchaus in derselben liegen.

Hieraus folgt, daß man durch die zwei Schenkel irgend eines ebenen Winkels eine Ebene legen kann, worin er sich befindet, aber auch nur eine einzige. Daher nennt man einen solchen Winkel mit Recht einen ebenen Winkel. Würde seine Oeffnung durch eine gerade Linie geschlossen, so läge nun auch das ganze Dreieck in derselbigen Ebene.

Wird der Schenkel eines ebenen Winkels über seinen Scheitel verlängert, so kann diese Verlängerung nicht ausserhalb seiner Ebene fallen. Folglich liegt jeder Winkel mit seinem Nebenwinkel in einerlei

Ebene, und ebendieses muß auch bei dem Scheitelwinkel eines gegebenen Winkels stattfinden.

Auch müssen irgend drei, im körperlichen Raume willkührlich gewählte Puncte, welche nicht in gerader Linie liegen, sich in einerlei Ebene befinden. Denn wenn von zwei derselben nach dem dritten zwei geraden Linien gezogen werden, so bilden diese einen Winkel, in dessen Ebene jeder Schenkel, daher auch jeder seiner Endpuncte und somit auch die gerade Verbindungslinie zwischen beiden liegt.

Da sich jeder gegebene Winkel um einen Schenkel als Achsenlinie drehen läßt, so ist klar, daß die Lage dieser Ebene nur dadurch fest bestimmt werden kann, daß irgend ein dritter Punct angenommen wird, bei dessen Erreichen die drehende Bewegung aufhört. Daher wird die feste Lage einer Ebene durch drei Puncte bestimmt, welche nicht in einer einzigen geraden Linie liegen.

III. Da die Stereometrie einen Theil der geometrischen Raumlehre überhaupt bildet, so muß sie sowohl einen anschaulichen als auch einen wissenschaftlichen Theil haben. Die bloße Zusammenstellung stereometrischer Anschauungen kann sowenig ein wissenschaftliches Ganzes bilden, als man im Stande wäre, ohne die Klarheit der Begriffe von den verschiedenen Körpern, eine überzeugende Wissenschaft hervorzubringen.

Daher ist die stereometrische Anschauungslehre jener Theil der Raumlehre überhaupt, welcher die stereometrischen Anschauungen und Begriffe zur Klarheit bringt, und hierdurch das wissenschaftliche Lehrgebäude vorbereitet.

Die stereometrische Wissenschaftslehre aber ist jener Theil der Raumlehre, welcher die Entstehung, Vergleichung und Berechnung der wichtigsten Arten allseitig begränzter Körper wissenschaftlich darstellt.

Sie befaßt einen elementaren und einen höheren Theil. Jener beschäftigt sich mit der wissenschaftlichen Betrachtung der prismatischen, pyramidalischen und kugelförmigen Körper; dieser aber mit Untersuchung solcher Körper, welche durch die Bewegung anderer krummen Linien, als die Kreislinie ist, entstehen, oder auch sonst als unregelmäßige zu betrachten sind.

Die Gränzlinie dieser beiden Abtheilungen ist nicht scharf gezogen; gerade so wenig, als dieses bei der Gränze der niederen und höheren Planimetrie der Fall ist.

In der gegenwärtigen Schrift werden die Grundlehren der niederen Stereometrie wissenschaftlich entwickelt.

§. 2.

Vom senkrechten und schiefen Stande gerader Linien auf Ebenen.

I. Wenn eine gerade, sich von einem Puncte in einer Ebene über dieselbe erhebende Linie mit irgend zwei geraden, aus ihrem Berührungspuncte mit der Ebene in derselben gezogenen, nicht eine einzige gerade bildenden Linie einzeln genommen zwei rechte Winkel macht, so steht diese Linie auf der Ebene senkrecht, d. h. sie wird mit jeder andern, aus diesem Be-

rührungspuncte in der Ebene gezogenen geraden einen rechten Winkel bilden.

Es sei am (Fig. 31.) eine gerade Linie, welche sowohl mit mf als mit mg einen rechten Winkel bildet; so, daß gmf selbst ein Winkel ist, so wird diese Linie am ein Loth auf der Ebene st seyn.

Man verlängere gm über m nach d, daß md = mg und fm über m nach h, daß mh = mf ist und ziehe die geraden Verbindungslinien hg, gf, fd und dh, so sind die Dreiecke hmg und dmf, hmd und gmf paarweise congruent und hdfg ist ein Parallelogramm.

Zieht man nun durch m eine willkührliche Linie bmq, so muß auch das Dreieck hmb dem Dreiecke fmq congruent und folglich mb = mq seyn.

Nimmt man nun in ma den willkührlichen Punct a und zieht aus ihm die geraden ah, ab, ag, af, aq und ad, so entstehen mehrere, sich über die Ebene st erhebende Dreiecke, welche nun mit einander verglichen werden müssen.

Da die rechtwinkeligen Dreiecke amd und amg, weil sie zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen rechten Winkel gemein haben, sowie auch die Dreiecke amh und amf aus gleichem Grunde congruent sind, so ist ad = ag und ah = af. Da also die Seitendreiecke daf und hag die drei Seiten gemein haben, so sind sie ebenfalls congruent und es ist der Winkel afq dem Winkel ahb gleich.

Da aber in den Dreiecken afq und ahb auch noch die Seiten af und fq den Seiten ah und hb einzeln genommen gleich sind, so decken sie sich und es ist aq = ab.

Weil nun die zwei Dreiecke amq und amb die drei Seiten einzeln genommen gemein haben, so sind sie ebenfalls congruent und der Winkel amq muß dem Winkel amb gleich, folglich jeder ein rechter seyn.

Daher bildet die Linie am mit jeder durch m in der Ebene st gezogenen einen rechten Winkel, und steht daher, nach der in dem Vorhergehenden gegebenen Worterklärung auf ihr senkrecht.

II. Wenn man an den Endpunct einer geraden Linie mehrere andere senkrecht auf sie zieht, so müssen sich diese Lothe sämmtlich in der nämlichen Ebene befinden.

Gesetzt, es seien auf ab (Fig. 32.) im Puncte b die geraden bn, bd und bc senkrecht auf sie gezogen; so, daß ∢ abn = ∢ abd = ∢ abc = R ist, so befinden sich bn, bd und bc in einerlei Ebene.

Sollten diese Linien bc, db und bn nicht in einerlei Ebene liegen, so müßte die Linie bn, wenn man die durch cbd gehende Ebene vw gehörig verlängert, entweder oberhalb oder unterhalb derselben liegen.

Gesetzt, es befände sich bn oberhalb derselben so müßte eine durch abn gelegte, gehörig verlängerte Ebene die Ebene vw, worin sich bc und bd befindet, einmal durchschneiden. Man nehme an, dieser Durchschnitt sei bm, so müßte, weil ab auf vw senkrecht steht, Winkel abm = R seyn. Allein der Annahme gemäß ist auch Winkel abn = R. Folglich wäre ∢ abm = ∢ abn, was widersprechend ist, da das Ganze größer als sein Theil seyn muß.

Da aus gleichem Grunde die Linie bn auch nicht unterhalb der Ebene des ∡ cbd liegen kann, so muß bn in die nämliche Ebene fallen.

Man sieht leicht, daß dieser Satz gerade der umgekehrte des vorigen ist.

§. 3.

Lothrechte und gleichlaufende Lage solcher Linien.

I. Wenn zwei gerade Linien so auf einer Ebene aufgerichtet sind, daß jede von ihnen auf ihr lothrecht steht, so sind diese zwei Linien unter sich gleichlaufend.

Es sei auf der Ebene gq (Fig. 33.) sowohl bd als ch lothrecht, so ist auch bd mit ch parallel.

Zieht man durch die Fußpuncte dieser Lothe die Verbindungslinie bc, so muß, nach der Annahme, ∡ dbc = ∡ hcb = R seyn. Wüßte man nun noch, daß auch bd und ch in einerlei Ebene läge, so müßte, nach einem bekannten Satze der Planimetrie, db mit hc parallellaufend seyn. Dieses ist also zu beweisen.

Man nehme in bd einen willkührlichen Punct d, ziehe dc, errichte auf bc in der Ebene gq ein Loth ca und mache ca = db; auch ziehe man die Verbindungslinien da und ba.

Da die beiden Dreiecke dbc und bca die zwei Seiten nebst dem von ihnen eingeschlossenen rechten Winkel gemein haben, so sind sie congruent und es ist dc = ba.

Nun haben aber die Dreiecke dca und dba die drei Seiten einzeln genommen mit einander gemein, und sind daher ebenfalls congruent. Da aber ∡ dba = R ist, so muß auch ∡ dca = R seyn.

Es bildet demnach sowohl die Linie dc als hc und bc mit ca einen rechten Winkel und es müssen sich jene drei Linien in einerlei Ebene befinden. Nun liegt aber db in der Ebene des Winkels dcb, folglich liegt auch ch und bd in einerlei Ebene und es müssen beide, weil jeder der innern Winkel ein rechter ist, mit einander gleichlaufend seyn.

II. Wenn eine gerade Linie auf einer Ebene lothrecht und eine andere mit dieser lothrechten gleichlaufend ist, so steht auch diese letztere auf der Ebene senkrecht.

Es sei auf der Ebene gq (Fig. 33.) die bd lothrecht und ch mit ihr gleichlaufend, so muß auch hc auf gq ein Loth seyn.

Da bd mit ch parallel ist, so liegen beide in einerlei Ebene und wenn man die Verbindungslinie bc zieht, so muß ∡ hcb = ∡ dbc = R seyn. Wäre nun noch ∡ hca = R, so müßte hc auf gq senkrecht seyn.

Zieht man hier die nämlichen Hülfslinien, wie zu dem vorigen Satze, so wird ebenso wie dort bewiesen, daß ac auf der Ebene dcb senkrecht sei. Da aber ch in der nämlichen Ebene bcd liegt, so muß auch ∡ ach = R seyn, und hc, weil sie sowohl mit cb als mit ca einen rechten Winkel bildet, auf gq senkrecht stehen.

III. Wenn eine gerade Linie, welche sich ausserhalb einer gegebenen Ebene befindet, mit jeder von zwei

anderen geraden, in dieser Ebene liegenden Linien einzeln genommen gleichlaufend ist, so müssen auch jene beiden Linien unter sich parallel seyn.

Es seien pb und fg (Fig. 34.) die zwei in einerlei Ebene liegenden geraden Linien, dq eine dritte gerade, welche sich ausserhalb dieser Ebene befindet. Wenn nun dq mit pb und eben diese dq auch mit fg gleichlaufend ist, so wird auch pb mit fg parallel seyn.

Man nehme in dq einen beliebigen Punct m und errichte aus ihm in der Ebene, worin die zwei Parallelen pb und dq liegen, ein Loth auf dq und in der Ebene, worin die Parallelen dq und fg liegen, ebenfalls ein Loth auf dq, so muß die Linie dq, weil sie sowohl mit mh als mit ma einen rechten Winkel bildet, auf der Ebene hma lothrecht stehen.

Da nun, nach der Annahme, sowohl pb als fg mit dq gleichlaufend sind, so müssen sie ebenfalls auf hma lothrecht und somit unter sich gleichlaufend seyn.

IV. Wenn aus dem Scheitel eines gegebenen Winkels eine gerade Linie gezogen wird, welche auf dessen Ebene senkrecht oder schief steht, in derselben ein Punct willkührlich genommen und aus ihm mit jedem Schenkel des gegebenen Winkels eine Parallele gezogen wird, so muß der durch sie gebildete Winkel dem gegebenen Winkel gleich seyn.

Es sei qop (Fig. 35.) der gegebene Winkel, og eine sich über seine Ebene erhebende gerade Linie, g ein willkührlicher Punct in ihr und gn mit op, sowie auch gm mit oq gleichlaufend, so wird $\sphericalangle$ qop = $\sphericalangle$ mgn seyn.

Wenn man in dem Winkel qop die Stücke ob und ob willkührlich annimmt, gd = ob und gf = oh macht, auch die geraden Verbindungslinien db und fh zieht, so ist, weil gf mit oh gleichlaufend und auch gf = oh ist, gfho ein Parallelogramm und fh = go.

Auf gleiche Weise muß auch gdbo ein Parallelogramm und db = go seyn. Da nun sowohl fh als db der go gleich ist, so muß auch db = fh seyn, und weil sowohl db als fh mit go parallel ist, so ist auch db mit fh gleichlaufend, und daher dfhb ein Parallelogramm, worin df = bh ist.

Da nun die beiden Dreiecke dgf und boh die drei Seiten einzeln genommen mit einander gemein haben, so decken sie sich und es ist ✕ mgn = ✕ qop.

§. 4.

Lothe auf Ebenen zu construiren.

I. Sowie die Planimetrie in Bezug auf die Construction der Lothe die zwei Hauptaufgaben aufstellt: von einem ausserhalb und innerhalb einer geraden Linie gegebenen Puncte ein Loth auf sie zu errichten, so kommen eben diese auch in der Körperlehre vor.

Man soll von einem ausserhalb einer Ebene gegebenen Puncte eine senkrechte Linie auf sie ziehen.

Die Ebene vw (Fig. 36.) und der willkührliche Punct d ausser ihr sei gegeben, aus welchem eine senkrechte Linie auf diese Ebene construirt werden soll.

Man ziehe eine willkührliche gerade Linie bp in dieser Ebene und auf sie aus dem Puncte d das Loth

dg, was gerade so geschehen kann, wie in der Planimetrie, da sich die Puncte b, d und p in einer Ebene befinden.

Nun errichte man aus g in der Ebene vw auf bp das willkührliche Loth gm und auf dieses wiederum aus d die senkrechte dq wie zuvor, so wird diese auf der Ebene vw lothrecht seyn. Um dieses zu erkennen, ziehe man durch q in der Ebene vw die mit bp parallele nc, so ist, da ∢ pgd = ∢ pgq = R, auch die gp eine lothrechte auf dem Dreiecke dgq.

Da aber qc mit gp gleichlaufend ist, so steht auch qc auf gqd lothrecht und es ist sowohl cqg als cqd = R.

Da somit die dq sowohl mit qg als mit qc einen rechten Winkel bildet, so muß sie auf der Ebene vw senkrecht seyn.

II. Daß von dem Puncte d nur ein einziges Loth dq auf die Ebene vw möglich ist, folgt nunmehr indirect daraus, daß von diesem Puncte kein anderes Loth auf die Ebene möglich ist.

Wäre z. B. dg ein solches Loth, so müßte, wenn die Verbindungslinie gq gezogen würde, nun auch ∢ dgq = R seyn, was bekanntlich unmöglich ist, da schon ∢ dqg = R ist.

Auch erkennt man hieraus, daß von dem Puncte d keine kürzere Linie auf die Ebene vw möglich ist, als das Loth dq.

Denn jede andere Linie, wie z. B. dg wird in dem Dreiecke dgq eine Hypotenuse und somit immer größer, als die Cathete dq seyn.

III. Man soll von einem innerhalb einer Ebene gegebenen Puncte ein Loth auf sie errichten.

Es sei in der Ebene vw der Punct h gegeben, aus welchem das Loth hs auf sie zu errichten ist.

Man nehme ausserhalb der Ebene einen Punct d, ziehe aus ihm, nach dem Vorhergehenden, auf vw das Loth dq und nun durch h mit diesem Lothe qd die gleichlaufende hs, was nach einer Aufgabe der Planimetrie leicht geschehen kann, da diese hs in der durch d, q und h gehenden Ebene sich befindet, so muß diese hs das verlangte Loth seyn.

Denn da dq auf vw lothrecht und sh mit dq parallel ist, so muß auch sh auf ihr lothrecht seyn.

IV. Auch kann man aus einem in der Ebene gegebenen Puncte nur ein einziges Loth auf sie errichten.

Denn sollte es, ausser dem Lothe hs, noch ein anderes z. B. ht auf sie geben, so denke man sich durch die Ebene des Winkels sht eine Ebene, welche vw in hq schneidet. Hier müßte nun sowohl shq, als thq ein rechter Winkel seyn, was unmöglich ist, da das Ganze größer als sein Theil seyn muß.

V. Wenn eine Ebene von einer andern geschnitten wird und eine gerade Linie ist auf der einen von ihnen lothrecht, so kann sie es nicht auch zugleich auf der andern seyn. Man denke sich durch die Puncte dbp eine Ebene, welche die Ebene vw in bp schneidet und aus d das Loth dq auf letztere, so ist, wie man leicht sieht, dgq der Neigungswinkel der sich schneidenden Ebenen und dqg ein rechtwinkeliges Dreieck, worin der Winkel bei d ein spitzer seyn muß.

VI. Steht daher auf jeder von zwei Ebenen eine und die nämliche gerade Linie lothrecht, so müssen diese zwei Ebenen mit einander parallel laufen. Denn wären sie es nicht, so müßten sie sich einmal durchschneiden und es stände eine gerade Linie auf jeder von zwei sich schneidenden Ebenen senkrecht, was, nach dem Ebenbemerkten, unmöglich ist.

§. 5.

Uebungsfragen.

I. Was ist der geometrische Körper? und was sind seine Grenzen? Was und wie vielerlei sind die Flächen? Eben dieses von den Linien? Was ist der Punct? Was entsteht aus dem Durchschnitt eines Körpers durch eine Ebene? Was ist der Durchschnitt zweier einfach gekrümmten Flächen? Was ist er bei einer Ebene und einer gekrümmten Fläche? Was bei zwei Ebenen? Warum liegen die Schenkel eines Winkels immer in einer Ebene? Warum irgend drei, nicht in gerader Linie liegende Puncte? — Wie wird die Stereometrie eingetheilt? Erklärung dieser Theile? (§. 1.)

II. Wann steht eine gerade Linie, auf einer Ebene senkrecht? Vorbereitung zum Beweise und Beweis dieses Lehrsatzes? Wenn am Ende einer geraden Linie mehrere Lothe auf ihr errichtet sind, warum liegen diese alle in einerlei Ebene? (§. 2.)

III. Warum sind zwei auf der nämlichen Ebene lothrechtstehende Linien unter sich gleichlaufend? Warum ist eine mit einem Lothe parallele Linie auch ein Loth auf dieser Ebene? Warum sind zwei Linien in einer Ebene unter sich parallel, wenn jede mit einer ausserhalb dieser Ebene liegenden gleichlaufend ist? Warum sind zwei Winkel in verschiedenen Ebenen einander gleich, wenn ihre Schenkel paarweise parallel sind? (§. 3.)

IV. Von einem ausserhalb einer Ebene gegebenen Puncte ein Loth auf sie zu errichten? Eben dieses wenn der Punct in derselben liegt? Warum gibt es hier nur ein Loth? Warum ist es die kürzeste Linie? Warum kann eine gerade Linie nicht auf jeder von zwei sich schneidenden Ebenen lothrecht seyn? Welche Lage haben also zwei Ebenen gegen einander, auf welchen beiden eine gerade Linie lothrecht ist. (§. 4.)

II. Lehrübung.

Wissenschaftliche Bestimmung der Lage der Ebenen gegeneinander.

§. 1.

Zwei Ebenen als parallele und lothrechte.

I. Die Aufgabe: eine Ebene zu construiren, welche mit einer gegebnen gleichlaufend ist, kann nun ebenfalls leicht aufgelöset werden.

Es sei durch den, ausserhalb der Ebene vw (Fig. 37.) gegebenen Punct a eine mit ihr gleichlaufende Ebene zu construiren.

Man ziehe aus a das Loth ao auf vw, aus o in ihr zwei willkührliche, einen Winkel dog einschließende Linien od, og, durch a die af mit od und die ah mit og gleichlaufend und lege durch den Winkel fah eine Ebene mn, so ist diese mit vw gleichlaufend.

Da ∡ aod = R und af mit od parallel ist, so muß auch ∡ oaf = R seyn. Auf gleiche Weise ist auch ∡ oah = R. Daher steht oa auf der Ebene mn lothrecht und diese mn kann in ihrer Verlängerung mit der verlängerten vw nie zusammentreffen, und ist daher mit ihr gleichlaufend.

Hieraus folgt nun, daß eine gerade Linie, welche auf einer von zwei gleichlaufenden Ebenen lothrecht steht, auch auf der andern senkrecht sei. Denn stände sie schief auf der andern, so müßte, wenn man durch diesen Neigungswinkel und längs des Lothes eine Durchschnittsebene legte, weil hier die zwei innern Winkel kleiner als zwei rechte sind, die eine Ebene, gehörig verlängert, einmal die andere durchschneiden.

II. Es sei auf einer Ebene ein Loth gegeben, so muß, wenn durch dieses Loth eine andere Ebene gelegt wird, welche jene erste durchschneidet, auch diese auf jener senkrecht stehen.

Es sei auf der Ebene vw (Fig. 36.) dq lothrecht, so muß jede Ebene durch sie z. B. die Ebene ndc auf vw senkrecht seyn.

Denn wenn man aus q auf nc in der Ebene vw die qg senkrecht, und von d die dg zieht, so ist der ∡ dqg, als Neigungswinkel der durch ndc gehenden Ebene, ein rechter, folglich auch die Ebene ndc auf vw lothrecht.

III. Wenn eine Ebene auf der andern lothrecht steht und man zieht aus einem in jener nach Belieben gewählten Puncte auf ihre Durchschnittslinie ein Loth, so muß dieses auch auf der andern Ebene ein Loth seyn.

Wenn die Ebene ndc, auf vw lothrecht stehend, die letztere in nc schneidet, und aus d auf nc das Loth dq gezogen wird, so ist auch dq auf vw lothrecht.

Denn weil die Ebene ndc auf vw senkrecht ist, so muß ihr Neigungswinkel dqg ein rechter seyn, daher

bildet dq sowohl mit qc als mit qg einen rechten Winkel und ist daher senkrecht auf vw.

Wird daher aus d auf vw ein Loth dq gezogen, so muß sich dieses in der auf vw senkrecht stehenden Ebene ndc befinden. Denn dq ist ein Loth von d auf vw und es gibt aus d nur ein Loth auf vw.

IV. Wenn aus einem Puncte des Durchschnitts zweier aufeinander senkrechten Ebenen ein Loth in der einen Ebene auf ihn gezogen wird, so ist diese Linie auch ein Loth auf der andern Ebene. Wenn ndc auf vw lothrecht und qd in ndc auf nc senkrecht ist, so muß auch qd ein Loth auf vw seyn. Denn es ist sowohl $\measuredangle$ dqg als $\measuredangle$ dqc ein rechter Winkel.

V. Wenn sich zwei Ebenen schneiden, so steht jede auf der Ebene ihres Neigungswinkels lothrecht, so wie auch letztere auf jeder von beiden senkrecht steht. Wenn sich die Ebenen bdp und vw in bp schneiden, und dgq ihr Neigungswinkel ist, so steht bdp auf dgq lothrecht weil eine Linie pq auf ihr ein Loth ist. Da nun dq ein Loth auf vw ist und folglich dgq auf vw senkrecht steht, so muß auch umgekehrt vw auf dgq lothrecht stehen.

§. 2.

Zwei Ebenen in Vergleichung mit einer dritten.

I. Wenn zwei unter sich parallele Ebenen von einer dritten geschnitten werden, so haben hier, in Bezug auf die Neigungswinkel der sich schneidenden Ebenen, ähnliche Verhältnisse statt mit jenen der Planimetrie, wenn zwei Parallellinien von einer dritten geschnitten werden. Es sind nämlich

a) die zwei inneren Winkel zusammen zweien rechten gleich; es ist

b) jeder äussere seinem zugehörigen innern und

c) jeder Wechselwinkel dem andern gleich.

Es seien dc und ab (Fig. 38.) die zwei Parallelebenen, welche von der dritten Ebene qp in den Linien fi und lt geschnitten werden, so ist, wenn man durch den Punct h und r die gerade mhrg auf fi und lt, und auf gleiche Weise auch die geraden ohn und wrv lothrecht auf sie in den Ebenen dc und ab errichtet:

a) ∢ nhr + vrh = ∢ ohr + ∢ vrh = 2 R.

b) ∢ mhn = ∢ mrv; ∢ mho = ∢ mrw; ∢ grv = ∢ ghn; ∢ grw = ∢ gho.

c) ∢ nhr = ∢ hrw und ∢ vrh = ∢ ohr.

Da die Ebenen dc und ab gleichlaufend sind, so müssen es auch die Durchschnittslinien fi und lt seyn. Denn, wären es letztere nicht, so müßten sie sich in ihrer Verlängerung und mit ihnen auch die Ebenen einmal durchschneiden, was gegen die Voraussetzung ist.

Da ∢ ihn = ∢ trv = R auch hi parallel mit rt, so ist auch hn mit rv gleichlaufend, wie leicht erhellt, wenn hn = rv gemacht, und die Verbindungslinien in und tv gezogen werden.

Folglich sind auch die Linien on und wv gleichlaufend und die Gleichheit der vorhin genannten Winkel wird nun hier gerade ebenso wie in der Planimetrie bewiesen, da die Parallelen on und wv von der geraden mg in h und r geschnitten werden.

II. Ganz auf ähnliche Weise wird auch der Parallelismus beider Ebenen dc und ab aus jeder der

drei folgenden Bedingungen nachgewiesen, wenn nämlich:

a) $\angle$ nhr + $\angle$ vrh = 2R, oder

b) $\angle$ mhn = $\angle$ mrv oder

c) $\angle$ nhr = $\angle$ wrh ist.

Diese Beweise zu führen, kann als lehrreiche Uebung empfohlen werden.

III. Wenn sich aus einer Ebene zwei schiefstehende Linien dergestalt erheben, daß sie mit einander gleichlaufend sind, so bilden sie gegen diese Ebene gleiche Neigungswinkel.

Es seien in der Ebene wq (Fig. 39.) aus b und q zwei unter sich parallellaufende schiefe Linien errichtet, so werden beide gegen diese Ebene einerlei Neigung haben.

Man ziehe aus willkührlich in bg und qd gewählten Puncten g und d auf die Ebene wv die Lothe gm und dn und noch die Verbindungslinien bm, qn und qb.

Da gm und dn zwei Lothe auf wv sind, so müssen sie unter sich parallel seyn. Da ferner auch gb mit dq gleichlaufend ist, so muß auch $\angle$ g = $\angle$ d seyn. Daher ist auch in den rechtwinkeligen Dreiecken gbm und dqn der $\angle$ gbm = $\angle$ dqn. Weil aber eben diese Winkel die Neigungen der geraden bg und qd gegen die Ebene wv bestimmen, so sind auch diese Neigungen einander gleich.

IV. Wenn von zwei sich durchschneidenden Ebenen jede auf einer dritten senkrecht steht, so muß auch ihre Durchschnittslinie auf derselben lothrecht seyn.

Wenn auf der Ebene vw (Fig. 36.) sowohl die Ebene dgq als auch die Ebene ndc, welche jene in

der geraden dq schneidet, lothrecht steht, so ist auch dq auf vw senkrecht.

Denn da die Ebene dgq senkrecht auf vw ist, so muß ∢ dqg = R seyn, sowie auch ∢ dqc = R ist, weil die Ebene ndc ebenfalls lothrecht steht. Daher bildet dq sowohl mit qg als mit qc einen rechten Winkel und ist daher ebenfalls auf vw senkrecht.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Wie wird eine Ebene construirt, welche mit einer gegebenen gleichlaufend ist? Beweis der Richtigkeit? Warum ist eine gerade Linie, welche auf einer von zwei gleichlaufenden Ebenen lothrecht steht, auch lothrecht auf der andern? Warum ist eine durch ein Loth gelegte Ebene auch auf der Ebene jenes Lothes senkrecht? Warum ist ein aus dem Durchschnitte zweier lothrechten Ebenen in der einen gezogenes Loth auch auf der andern senkrecht? Warum ist diese Linie auch ein solches Loth, wenn sie aus einem Puncte einer Ebene lothrecht auf ihren Durchschnitt gezogen wird? Wie steht jede von zwei sich schneidenden Ebenen auf der Ebene ihres Neigungswinkels? und umgekehrt? (§. 1.)

II. Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten werden, welche Winkel entstehen hierdurch? Aus welchem Verhältnisse derselben geht ihr Parallelismus, ihr Zusammen- und ihr Auseinanderlaufen hervor? Welche Aehnlichkeit findet sich hier zwischen der Stereometrie und der Planimetrie? — und wie werden die stereometrischen Fälle auf die planimetrischen zurückgeführt? Welche Neigung haben zwei auf einer Ebene schief stehende unter sich gleichlaufende Linien? (§. 2.)

Fünfter Lehrgang.

Wissenschaftliche Construction der Körperwinkel und der Körper.

I. Lehrübung.

Von den Körperwinkeln.

§. 1.

Construction des dreikantigen Körperwinkels.

I. Ein Körperwinkel kann nicht durch zwei ebene Winkel als Seitenflächen gebildet werden.

Es seien zwei ebene Winkel bgd (Fig. 40.) und dga, welche beide in einerlei Ebene liegen, gegeben, so kann aus ihnen kein Körperwinkel gebildet werden.

Denn so lange beide in einerlei Ebene liegen, können sie durchaus nichts Körperliches einschließen. Läßt man aber den einen von beiden, z. B. den Winkel dga sich um gd, als Achsenlinie drehen, so entsteht wohl hierdurch ein Flächenwinkel, aber noch immer nicht ein körperlicher Winkel, da der Körperraum auf der, gegen gd überliegenden Seite noch unbegränzt ist.

Von drei ebenen Winkeln kann aber ein Körperwinkel gebildet werden.

Es seien die ebenen Winkel dga (Fig. 41.) und mgd = nga gegeben, so kann, wenn die beiden letzteren zusammengenommen nicht eben so groß oder kleiner als der erstere sind, aus ihnen ein Körperwinkel entstehen.

Man denke sich den Winkel mgd um dg und den Winkel nga um ga aufwärts bewegt, so werden ein-

mal die Schenkel gm und gn sich in der gemeinschaftlichen Linie gv vereinigen und hier bei g einen dreikantigen Körperwinkel bilden, welcher von den drei gegebenen Winkeln als Seitenflächen begränzt ist.

Die Entstehung eines solchen Körperwinkels läßt sich auch dadurch nachweisen, daß man in der Ebene eines gegebenen Winkels ein willkührliches Loth errichtet, und von einem Puncte in ihm nach jedem Scheitel des Winkels eine gerade Linie zieht.

Es sei bgd (Fig. 42.) der gegebene Winkel, n der in ihm genommene Punct, nq das aus ihm errichtete Loth und gq die Verbindungslinie, so entsteht bei g ein dreikantiger Körperwinkel, welcher von den Seitenwinkeln qgb, qgd und bgd gebildet wird.

Nimmt man ausserhalb der Ebene eines beliebigen Dreiecks einen Punct und zieht aus ihm drei gerade Linien nach seinen Scheitelpuncten, so entsteht nicht nur an diesem Puncte, sondern auch an jedem Scheitelpuncte des Dreiecks ein dreikantiger Körperwinkel.

II. Je zwei der drei Seitenwinkel, welche einen dreikantigen Körperwinkel einschließen, müssen zusammengenommen größer als der dritte seyn.

Denn wenn irgend zwei von ihnen zusammengenommen dem dritten gleich seyn sollten, so würden sie mit ihm in die nämliche Ebene fallen und sich nicht über diese Ebene zur Bildung eines körperlichen Raums erheben können.

Wären aber irgend zwei derselben zusammen kleiner als der dritte, so würden sie nur einen Theil seines Winkelraums erfüllen und eben so wenig mit ihm etwas Körperliches erzeugen können.

III. Nunmehr ist es leicht, einen dreikantigen Körperwinkel zu bilden, welcher von drei gleichen Seitenwinkeln begränzt ist.

Man construire das gleichseitige Dreieck bhg (Fig. 43.) errichte aus seinem Mittelpuncte m das auf seiner Ebene stehende Loth ma, nehme darin einen beliebigen Punct a und ziehe aus ihm die drei geraden Linien ab, ah und ag, so ist der bei a entstehende Körperwinkel der verlangte.

Wenn man aus m die drei geraden mb, mh und mg zieht, so entstehen die drei rechtwinkeligen Dreiecke amb, amh und amg, welche einander congruent sind. Daher ist ab = ah = ag. Da nun auch bh = hg = gb, so haben die Dreiecke abh, ahg und agb die drei Seiten mit einander gemein; daher auch ∡ bah = ∡ bag = ∡ gab ist.

Sollte ein dreikantiger Körperwinkel gebildet werden, welcher von drei rechten Winkeln umschlossen wäre, so dürfte man nur aus dem Scheitel eines gegebenen rechten Winkels ein Loth auf seine Ebene errichten, um denselben zu erhalten.

Sollte aber der zu bildende Körperwinkel von drei spitzen Winkeln begränzt seyn, so construire man einen spitzen Winkel, ziehe von seinem Scheitelpuncte eine willkührliche Linie durch seine Ebene, und errichte aus diesem Puncte auf diese gezogene Linie eine sich über die Ebene erhebende unter irgend einem spitzen Winkel, so muß diese auch mit jedem Schenkel des gegebenen Winkels einen spitzen Winkel bilden.

Sollte der zu bildende Körperwinkel von drei stumpfen Winkeln begränzt seyn, so würde man nur

aus dem Scheitel eines stumpfen Winkels durch seine Ebene eine willkührliche Linie ziehen, und auf diese aus eben diesem Scheitelpuncte eine sich über die Ebene erhebende unter einem stumpfen Winkel zu errichten haben.

IV. Wenn man sich irgend einen dreikantigen Körperwinkel denkt, so muß die Summe seiner drei Seitenwinkel immer weniger als vier rechte Winkel betragen.

Es sei der dreikantige Körperwinkel bei a (Fig. 43.) gegeben, so ist $\sphericalangle$ bah + $\sphericalangle$ hag + $\sphericalangle$ gab < 4 R.

Obwohl dieses schon daraus anschaulich wird, daß, wenn die Summe dieser drei Winkel vier rechten gleich wäre, dieselbe in eine einzige Ebene fallen müßten und somit keine körperlichen Ecken bilden könnten, so ist doch folgender Beweis vorzuziehen.

Wenn die drei Winkel bah, hag und gab zusammen vier rechte Winkel betrügen, so müßten, da in jedem Dreiecke die Summe der drei Winkel zweien rechten gleich ist, die sechs Winkel abh, ahb, ahg, agh, agb und abg zusammengenommen zweien rechten gleich seyn. Da aber die Winkel abh und W. abg zusammen größer als der Winkel hbg; ferner Winkel ahb und Winkel ahg zusammen größer als Winkel bhg, auch Winkel agh und Winkel agb zusammen größer als Winkel hgb sind, und die drei Winkel des Dreiecks bhg gerade zwei rechte betragen, so wäre das Größere dem Kleineren gleich. Daher müssen die sechs bei b, h und g liegenden Seitenwinkel mehr als zwei rechte und folglich die drei Seitenwinkel bei a weniger als vier rechte betragen.

§. 2.

Mehrkantige Körperwinkel. Congruente und symmetrische Körperwinkel.

I. Um einen vierkantigen Körperwinkel, welcher von vier gleichen Seitenwinkeln begränzt ist, zu bilden, denke man sich unter abqf (Fig. 44.) ein Quadrat, errichte aus seinem Mittelpuncte g das Loth gd auf dasselbe und ziehe die Verbindungslinien da, db, dq und df, so ist bei d der gefoderte Körperwinkel.

Denn die rechtwinkeligen Dreiecke dga, dgb, dgq und dgf sind congruent; folglich $da = db = dq = df$, und da auch $ab = bq = qf = fa$, so haben die vier Seitendreiecke die drei Seiten mit einander gemein, und es ist ∡ adb = ∡ bdq = ∡ qdf = ∡ fda.

Ganz auf ähnliche Weise kann auch ein vierkantiger Körperwinkel von ungleichen Seitenwinkeln gebildet werden.

Ebenso wird man leicht im Stande seyn, irgend einen mehrkantigen Körperwinkel, von gleichen oder ungleichen Seiten begränzt, zu construiren.

II. Auch müssen die vier bei d liegenden Seitenwinkel zusammengenommen weniger als vier rechte betragen. Denn wenn ihre Summe vier rechte betrüge, so müßten die acht bei a, b, q und f paarweise nebeneinander liegenden Seitenwinkel zusammen ebenfalls vier rechten Winkeln gleich seyn, was aber widersprechend ist, da ihre Summe mehr, als die vier Winkel des Vierecks abqf, d. h. mehr, als vier rechte betragen muß.

Man sieht leicht, daß dieser Beweis auch auf jeden anderen mehrkantigen Körperwinkel angewendet werden kann, und daß also überhaupt bewiesen ist, die Summe aller Seitenwinkel, welche irgend einen vielkantigen Körperwinkel begränzen, müsse weniger, als vier rechte betragen.

III. Gleichwie die Planimetrie von dem Decken der ebenen Winkel spricht, so muß in der Körperlehre das Decken der Körperwinkel erklärt und geometrisch nachgewiesen werden.

Das Decken der Körperwinkel hat dann statt, wenn sie dergestalt in einander können gestellt werden, daß ihre Scheitelpuncte, ihre Seitenkanten und ihre Seitenflächen durchaus in einander fallen, wenn sich gleich diese Seitenkanten ihrer ganzen Länge nach nicht vollkommen decken. Dieses wird durch Folgendes erläutert.

Es seien qan und gcb (Fig. 45.) zwei congruente Dreiecke, d und f zwei ähnlich liegende Puncte darin, dm und fh zwei gleich große, auf ihrer Ebene stehende Lothe, so entsteht, wenn man die Verbindungslinien ma und hc zieht, sowohl bei a als bei c ein dreikantiger Körperwinkel, deren jeder den andern deckt.

Denn das Dreieck qan wird so in gcb gelegt werden können, daß beide sich decken und nun wird auch die Verbindungslinie ad die ihr ähnlich liegende cf und folglich das Loth dm auch das Loth fh, und endlich die ma auch die hc vollkommen decken. Daher fallen auch die Seitenwinkel maq und hcg, sowie man und hcb vollkommen in einander, d. h. der Körperwinkel bei a deckt jenen bei c.

Dieses Decken würde auch dann noch statt finden, wenn man die Kanten aq, am und an noch über q, m und n verlängerte.

IV. Eine besondere Betrachtung verdienen hier die symmetrischen Körperwinkel, welche, obschon sie durch gleichviele, unter sich gleiche Seitenwinkel begränzt sind, einander doch nicht decken werden.

Es seien die Dreiecke bad und qvp (Fig. 46.) einander congruent, aber so in einerlei Ebene befindlich, daß db und qp in einer geraden Linie liegen und daß ba, in Bezug auf die gerade in der Mitte liegende Linie wf, sich ebenso auf die eine Seite neige, wie qv auf die entgegengesetzte geneigt ist. Hier ist $\sphericalangle b = \sphericalangle q$, $\sphericalangle a = \sphericalangle v$, $\sphericalangle d = \sphericalangle p$ und man kann sagen, daß die Dreiecke bad und qvp eine symmetrische Lage gegen diese Mittellinie wf haben.

Nimmt man nun in beiden die ähnlich liegenden Puncte n und o, errichtet die gleichen Lothe nc und om und zieht die Verbindungslinien ca und mv, na und ov, so entstehen bei a und v zwei dreikantige Körperwinkel, welche man symmetrische nennt, da die Seitenwinkel cab und mvq, cad und mvp, bad und qvp gegenseitig gleich sind; beide aber doch nicht so in einander gelegt werden können, daß sie sich decken.

Die Benennung dieser Winkel ist auch darauf gegründet, daß die Seitenkante ac gerade so zur Linken, wie vm zur Rechten geneigt ist, obwohl der Neigungswinkel, nämlich can und mvo, bei ihnen der nämliche ist.

Dieser Begriff der symmetrischen Körperwinkel, welcher auch die Entstehung symmetrischer Körper veranlaßt, war den alten Geometern fremd und ist erst von den französischen Mathematikern in späteren Zeiten eingeführt worden. Obwohl ihn die Stereometrie in ihrem wissenschaftlichen Lehrgebäude entbehren könnte, so ist doch diese Benennung wohl gewählt, um solche Körper gehörig zu bezeichnen.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Warum können zwei ebene Winkel keinen Körperwinkel bilden? Wie entsteht ein Körperwinkel durch drei ebene Winkel? Wie entsteht der dreikantige Körperwinkel noch auf andere Weise? Wie müssen je zwei der drei ebenen Winkel gegen den dritten beschaffen seyn, um mit ihm einen dreikantigen Körperwinkel zu bilden? Aus drei gleichen spitzen Winkeln, oder aus drei rechten Winkeln einen Körperwinkel zu bilden? Eben dieses mit drei stumpfen Winkeln? Warum müssen die drei Seitenwinkel eines dreikantigen Körperwinkels zusammen weniger als vier rechte Winkel betragen? (§. 1.)

II. Wie entsteht ein vierkantiger Körperwinkel, von vier gleichen Seitenwinkeln begränzt? Wie von ungleichen? Welche Gränze können diese vier Seitenwinkel nicht erreichen? Und warum dieses? Wie wird das Decken dreikantiger Körperwinkel erläutert? Wie das Decken vierkantiger und vielkantiger Körperwinkel? Müssen bei dem Decken der Körperwinkel sich auch ihre Seitenkanten decken? Wie entstehen dreikantige symmetrische Körperwinkel? Begriff dieser symmetrischen Körperwinkel? War dieser Begriff den alten Geometern schon bekannt? Ist er der Stereometrie unentbehrlich? (§. 2.)

II. Lehrübung.

Construction der prismatischen und regelmäßigen Körper.

§. 1.

Construction der eckigen prismatischen Körper.

I. Da das senkrechte dreieckige Prisma einer der einfachsten stereometrischen Körper ist, so muß seine wissenschaftliche Entstehung nun zuerst nachgewiesen werden, um den oben in der Anschauungslehre gegebenen Begriff gehörig zu begründen.

Es sei dac (Fig. 47.) irgend ein Dreieck als Grundfläche des zu bildenden Körpers. Man errichte aus d, a und c auf dessen Ebene drei willkührliche Lothe db, af und cq, nehme dm = ap = cn und ziehe die Verbindungslinien mp, pn und nm, so ist mpndac ein lothrechtes dreieckiges Prisma.

Da nämlich dm, ap und cn Lothe auf dac sind, so müssen sie paarweise mit einander gleichlaufend seyn, und weil noch dm = ap = cn, so müssen die Seitenflächen mpad, npac und mncd Rechtecke seyn. Daher ist auch das Dreieck mpn dem Dreiecke dac congruent, weil beide die drei Seiten gemein haben. Da ∡ dmp = ∡ dmn = R und ebenso ∡ apm = ∡ apn = R, auch ∡ cnm = ∡ cnp = R, so stehen auch dm, ap und cn auf mpn lothrecht, und eben daher muß auch mpn mit dac gleichlaufend seyn. Folglich hat der entstandene Körper alle Eigenschaften des senkrechten dreieckigen Prismas, dessen Entstehung hierdurch nachgewiesen ist.

Auf eine anschauliche Weise könnte dieser Körper dadurch erzeugt werden, daß sich das Dreieck dac in paralleler, unveränderter Lage von d nach m beweget.

II. Auf ähnliche Weise wird nun auch das schiefe dreieckige Prisma gebildet.

Es sei apc (Fig. 48.) das gegebene Dreieck, über welches das schiefe dreieckige Prisma construirt werden soll. Hier errichte man aus dem Scheitelpuncte a eine Linie am, welche schief auf apc steht, ziehe durch p und c die mit ihr gleichlaufenden schiefen Linien pb und cn, mache ad = pg = cf, und ziehe dg, gf und fd, so ist dgfapc das schiefe dreieckige Prisma.

Da pg und cf mit ad gleichlaufend sind, so müssen sie es auch unter sich selbst seyn und die drei Seitenflächen dgpa, fgpc und dfca müssen drei Parallelogramme seyn. Da dg mit ap und df mit ac parallel ist, so ist auch ∢ fdg = ∢ cap, und aus gleichem Grunde ∢ dgf = ∢ apc und ∢ gfd = ∢ pca. Auch muß, wegen dg = ap, gf = pc und df = ac, das Dreieck dgf dem Dreiecke apc congruent und, wie man leicht finden wird, auch mit ihm gleichlaufend seyn.

Die Entstehung dieses Körpers kann auch dadurch anschaulich gemacht werden, daß sich das Dreieck apc in paralleler und unverrückter Lage an der schiefen Linie von a bis d fortbewegt.

III. Auch geht nun die Construction des senkrechten Parallelopipedums ebenso überzeugend aus dem Bisherigen hervor.

Es sei dacb (Fig. 49.) ein Parallelogramm, so errichte man aus einem Scheitelpuncte a ein Loth ag

auf dasselbe, ziehe durch c, b, d und a die mit ihm parallelen cv, bw, dh u. ag, mache ap = cq = bm = dn und ziehe pq, qm, mn und np, so ist nc das zu bildende Parallelopipedum.

Da hier cq, bm und dn mit dem Lothe ap gleichlaufend sind, so müssen sie es auch unter sich seyn und sämmtlich auf der Grundfläche stehen; auch müssen, weil sie einerlei Größe haben, die Seitenflächen pacq, qcbm, mbdn und npad nicht bloß Parallelogramme, sondern auch Rechtecke seyn, weil ∢ pac = ∢ qcb = ∢ mbd = ∢ nda = R ist. Somit ist auch die Oberfläche npqm der Grundfläche congruent und weil ∢ apq = ∢ apn = R, auch mit ihr gleichlaufend. Daher hat dieser Körper alle Eigenschaften des senkrechten Parallelopipedums.

Wäre die Grundfläche ein Rechteck, so entstände ein von sechs Rechtecken eingeschlossenes Parallelopipedum, deren zwei gegenüberliegende parallel und congruent sind.

Wäre die Grundfläche ein Quadrat, so müßten auch die vier Seitenflächen vier unter sich congruente Rechtecke seyn.

Machte man, bei einer quadratischen Grundfläche, die Seitenkante dieser Quadratseite gleich, so entstände der Würfel, dessen Erzeugung hierdurch ebenfalls nachgewiesen ist.

Wie das senkrechte Parallelopipedum durch eine gehörige Bewegung seiner Grundfläche längs der Seitenkante hin entstehen kann, bedarf nun ebenfalls keiner weitern Nachweisung.

IV. Ganz einfach kann nun auch die Bildung eines schiefen Parallelopipedums nachgewiesen werden.

Wenn man aus dem Winkelpuncte d (Fig. 50.) des Parallelogramms dbac eine auf seiner Fläche schief stehende Linie dp errichtet, durch c, a und b die mit ihr gleichlaufenden cn, am und bq ziehet, dg = cn = am = bq macht, und nun noch die geraden gn, nm, mq und qg zieht, so muß ga ein schiefes Parallelopipedum seyn.

Denn wegen der gleichen und parallelen Seitenkanten sind die vier Seitenflächen gncd, nmac, mqba und gqbd wiederum vier Parallelogramme, wovon die zwei gegenüberliegenden gleich und congruent seyn müssen. Auch ist die Oberfläche gnmq der Grundfläche parallel und congruent, woraus die übrigen Eigenschaften des schiefen Parallelopipedums folgen.

Wie dieser Körper durch Bewegung der Grundfläche dcab längs der Seitenkante dg entstehen könne, ist ebenfalls leicht verständlich.

V. Ueberhaupt ist nunmehr die Entstehung jedes vielseitigen, senkrechten oder schiefen, eckigen prismatischen Körpers sehr leicht nachzuweisen.

Wenn man nämlich aus jedem Winkelpuncte irgend eines geradlinigen Vielecks ein gleich großes Loth auf seine Ebene errichtet und die Endpuncte dieser Lothe durch gerade Linien gehörig verbindet, so entsteht ein vielseitiges senkrechtes Prisma. Wird aber eine Seitenkante schief auf die Grundfläche gestellt, und durch jeden Winkelpunct derselben mit ihr eine gleichgroße Parallele gezogen, sodann ihre Endpuncte ge-

hörig verbunden, so entsteht das schiefe vieleckige Prisma.

§. 2.

Construction der rundlichen prismatischen Körper

I. Unter den rundlichen prismatischen Körpern soll zuerst die Entstehung des senkrechten Cylinders nachgewiesen werden.

Es sei aus dem Puncte d (Fig. 51.) mit dv der Kreis vw beschrieben, aus dessen Mittelpuncte das Loth da, aus v und w das Loth vg = wc = da errichtet und die Verbindungslinie gac gezogen, so muß gcwv ein Rechteck seyn, welches durch die Linie ad in zwei congruente Hälften getheilt ist. Dreht sich nun das Rechteck cadw um ad, als unbewegliche Achsenlinie, einmal ganz und gar umher, so beschreibt ac einen dem Kreise vw parallelen und congruenten Kreis gc, sowie die Linie cw eine krumme, in sich selbst zurücklaufende, einfach gekrümmte Seitenfläche erzeuget, wodurch der senkrechte Cylinder umschlossen wird.

Hieraus ist klar, daß der Achsenschnitt dieses Cylinders immer dem nämlichen Rechtecke gleich sei, sowie auch, daß die Achse auf der Oberfläche lothrecht stehe. Will man den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von sehr großer Seitenzahl betrachten, so denke man sich die Grundfläche vw als ein solches Polygon, errichte aus jedem Winkelpuncte ein gleichgroßes Loth und verbinde ihre Endpuncte durch gerade Linien, so entsteht ein der Grundfläche congruentes gleichlaufendes Polygon als Oberfläche und eine sehr große Menge von congruenten Rechtecken als Seiten-

flächen. Je mehr Seiten nun die Grundfläche bekömmt, desto mehr wird sich das Eckige dieses prismatischen Körpers verlieren und sich dem Runden annähern; so, daß man den senkrechten Cylinder als Prisma von sehr vielen Seiten construiren kann.

Eine dritte Entstehungsart dieses Körpers beruht darauf, daß sich der Kreis vw mit seinem Mittelpuncte d in paralleler, unveränderter Lage an der Achsenlinie da von d nach a bewegt.

II. Die Entstehung des schiefen Cylinders beruht auf einer ähnlichen Entwickelung. Denn wenn bf (Fig. 52.) den Kreis mit mb bedeutet, welcher die Grundfläche dieses Cylinders werden soll, so errichte man aus m die schiefstehende Linie mn und nehme an, der Kreis bf bewege sich, mit Beibehaltung seiner Lage, von m nach n, so beschreibt seine Peripherie die krumme Seitenfläche des schiefen Cylinders, welcher daher von dieser einfach gekrümmten Fläche und den zwei congruenten Kreisebenen bf und da begränzt ist.

Wird dieser Cylinder längs seiner Achse nm von einer Ebene durchschnitten, so entsteht jedesmal ein Parallelogramm als Durchschnittsfläche; aber diese Parallelogramme haben verschiedene Gestalt, je nachdem die Richtung des Durchschnitts eine andre ist.

Denkt man sich unter nv das Loth aus dem Mittelpuncte der Oberfläche auf die Grundfläche und unter fvmb den Durchmesser derselben so ist ∢ nmv als Neigungswinkel der schiefstehenden Achse mn zu betrachten, und das Durchschnittsparallelogramm fbda hat hier die größte Verschiedenheit seiner stumpfen und spitzen Winkel.

Geschähe der Durchschnitt längs der Achse nm, aber lothrecht stehend auf da und bf, so entstände ein Rechteck. Hätte aber die Durchschnittsebene andere Richtungen, so entständen wiederum andere Parallelogramme.

Man erkennt auch nunmehr recht klar, daß die krumme Seitenfläche dieses Cylinders nicht aus der Umdrehung des Parallelogrammes ndbm entstehen kann.

III. Man sieht nun auch, wie andere rundliche oder theils rundliche, theils eckige prismatische Körper entstehen können, die wiederum entweder als senkrechte oder als schiefe zu betrachten sind.

Wenn man aus irgend einem Puncte einer unregelmäßigen krummlinigen Figur ein Loth auf sie errichtet und diese Figur in paralleler unverrückter Lage an jenem Lothe sich so hinaufbewegen läßt, daß der Punct dieses Loth beschreibt, so wird hierdurch ein senkrechter rundlich-prismatischer Körper erzeuget. Sowie man die Peripherie seiner Grundfläche als eine Verbindung von sehr vielen geraden Polygonseiten betrachten kann, so läßt sich seine Seitenfläche als die Summe von eben sovielen, auf diesen Polygonseiten errichteten Rechtecken ansehen, deren Summe seine ganze Seitenfläche bildet.

Ganz auf ähnliche Weise können auch die übrigen, ebengenannten Körper gebildet werden.

§. 3.

Construction der eckigen pyramidalischen Körper.

I. Zur Construction der senkrechten dreieckigen Pyramide bedarf es nur eines gleichseitigen Dreiecks ahg (Fig. 53.), aus dessen Mittelpuncte m ein beliebiges Loth md errichtet wird. Zieht man nun die geraden Verbindungslinien dh, dg und da, so entsteht bei d ein dreikantiger Körperwinkel, gebildet von drei gleichen Seitenwinkeln hdg, gdq und qdh, welche als Seiten-Dreiecke die senkrechte dreieckige Pyramide umschließen.

Zieht man die Linien mh, mg und mq, so sind diese einander gleich, und es müssen auch die rechtwinkeligen Dreiecke dmh, dmg und dmq einander congruent und folglich die Linien dh, dg und dq einander gleich seyn. Daher sind auch die Seitendreiecke dhg, dgq und dqh congruent, woraus wiederum die Gleichheit der Körperwinkel bei h, g und q folgt; sowie man auch leicht nachweiset, daß dieselbe gleiche Neigung gegen die Grundfläche haben.

II. Um die schiefe dreieckige Pyramide zu construiren, nehme man in der Verlängerung der Dreiecksebene gqf (Fig. 54.) einen willkührlichen Punct h, errichte aus ihm das beliebige Loth hd und ziehe von d die drei geraden Linien dq, dg und df, so entsteht bei d ein dreikantiger Körperwinkel, von ungleichen Seiten-Kanten gebildet. Auch sind die Seitenflächen dqg, dgf und dfq ungleich, sowie auch die Seitendreiecke verschiedene Neigungen gegen die Grundfläche haben.

III. Um eine vierseitige senkrechte Pyramide zu construiren, errichte man aus dem Mittelpuncte n (Fig. 55.) des Quadrates gaqp das Loth nd und verbinde seinen Endpunct d mit den Winkelpuncten g, a, q und p, durch dg, da, dq und dp, so entsteht bei d ein von vier gleichen Seitenwinkeln gebildeter Körperwinkel, wie man leicht daraus erkennt, wenn die Hülfslinien ng, na, nq und np gezogen werden. Alles übrige kann hier ebenso wie kurz zuvor bei der senkrechten dreieckigen Pyramide nachgewiesen werden.

Auch läßt sich eine senkrechte viereckige Pyramide dadurch bilden, daß man aus der Mitte m des Rechtecks (Fig. 56.) gqpa ein Loth mh auf dasselbe errichtet und nun die Verbindungslinien hg, ha, hp und hq zieht.

IV. Soll eine vierseitige schiefe Pyramide gebildet werden, so könnte man in dem Trapeze dcgq (Fig. 57.) einen willkührlichen Punct m wählen, aus ihm auf die Vierecksebene ein Loth mn errichten und nun die Verbindunglinien nd, nq, ng und nc ziehen, wodurch die den Körperwinkel bei n bildenden Seitenwinkel, sowie auch die Seitendreiecke und ihre Neigungen gegen die Grundfläche verschieden an Größe würden.

Auch läßt sich die Construction dieser Pyramide wieder dadurch erläutern, daß man die Linie nd willkührlich bis f verlängert und dieselbe, mit n unbeweglich bleibend, längs der vier Seitenlinien dq, qg, gc und cd einmal herumführt.

Es ist übrigens klar, daß eine viereckige Pyramide schief seyn kann, obwohl sie entweder ein Quadrat oder ein Rechteck oder auch ein anderes Parallelogramm zur Grundfläche hat.

V. Wie man überhaupt vieleckige Pyramiden, welche theils senkrechte, theils schiefe seyn können, erzeugen kann, folgt zu klar aus dem Vorhergehenden, als daß es hier einer weiteren Auseinandersetzung bedürfte.

§. 4.

Construction der runden pyramidalischen Körper.

I. Die Construction des senkrechten Kegels wird am einfachsten dadurch begreiflich, daß man sich irgend ein rechtwinkeliges Dreieck hcn (Fig. 58.) vorstellt, welches um eine seiner Cathethen z. B. um hc einmal ganz und gar herumgedreht wird.

Da bei dieser Umdrehung der Winkel hcn immer ein rechter bleibt, so liegen, nach einem früher bewiesenen Satze, alle sich drehende Linien cn in einerlei Ebene und es wird hierdurch der Kreis nf gebildet, welcher die Grundfläche des Kegels ist. Da nun durch die Hypotenuse hn eine krumme in sich selbst zurücklaufende Seitenfläche erzeugt wird, so ist hierdurch die Entstehung des senkrechten Kegels nachgewiesen.

Ferner erkennt man, daß die Achse hc auf der Grundfläche nf senkrecht stehen, auch daß jedes durch den Achsenschnitt entstehende Dreieck ein gleichschenkeliges, dem Dreiecke nhf congruentes seyn muß,

weil für jeden Achsenschnitt die Dreiecke hcn und hcf congruent sind.

Wenn man auf die Kreisfläche nf das Loth ch, von h nach n eine gerade Linie gezogen und dieselbe nach g willkührlich verlängert hat, so läßt sich die Entstehung des senkrechten Kegels auch daraus ableiten, daß sich diese Linie hg durch eine Seitenbewegung rings um die Grundfläche dreht, und hierdurch die krumme Seitenfläche des senkrechten Kegels erzeugt, wovon nun ebenfalls leicht bewiesen werden kann, daß er ein gleichschenkeliger ist.

Hätte sich das Dreieck hcn um die unbewegliche Cathete nc gedreht, so wäre ebenfalls ein senkrechter Kegel entstanden, ch wäre der Halbmesser seiner Grundfläche und nc seine Achse gewesen.

II. Die Entstehung des schiefen Kegels läßt sich am Deutlichsten dadurch erkennen, daß man sich einen willkührlichen Kreis ag (Fig. 59.) von seinem Mittelpuncte c irgend eine auf ihm schiefstehende Linie cd als Achsenlinie errichtet, sodann eine willkührliche gerade daf zieht, und nun dieselbe rings um die Grundfläche herführt.

Wenn db das Loth von d auf die verlängerte Grundfläche ist, und man zieht bgca, so stellt ∢ dcb den Neigungswinkel der Achse vor und adg ist das Achsendreieck, worin die Seite ad von dg am meisten verschieden ist. Daher ist der schiefe Kegel ein ungleichseitiger und obwohl die Dreiecke dca und dcg einerlei Fläche haben, so sind sie doch an Gestalt verschieden.

Wird aber dieser Kegel nach der Achse dc und so geschnitten, daß die Durchschnittslinie auf ag senkrecht steht, so entsteht hierdurch ein gleichschenkeliges Dreieck, aber auch das einzige, welches aus dem Achsenschnitte möglich ist.

Auch ist klar, daß dieser schiefe Kegel nicht durch die Umdrehung des Dreiecks dca um die festbleibende Linie dc entstehen kann. Es entspringt nämlich hieraus ein Körper, welcher als der Unterschied zweier senkrechten Kegel zu betrachten ist.

III. Auf gleiche Weise ist auch die Construction der rundlichen oder theils rundlich, theils eckigen pyramidalischen Körper, welche theils senkrechte, theils schiefe seyn können, leicht nachzuweisen.

Nimmt man z. B. in der Mitte der Grundfläche einer krummlinigen Figur einen Punct, errichtet aus ihm eine schiefe Linie darauf, legt durch ihren Endpunct und durch den Umfang der Grundfläche eine willkührliche schiefe Linie, welche nun rings um die Grundfläche her geführt werden kann, so entsteht ein kegelähnlicher schiefer Körper, welcher von einer ebenen Grundfläche und von einer einfach gekrümmten Seitenfläche begrenzt ist.

§. 5.

Construction der Kugel und der regelmäßigen Körper.

I. Die Construction der Kugel geht am einfachsten daraus hervor, daß man sich den Halbkreis gab

(Fig. 60.) vorstellt, welcher um den unbeweglichen Durchmesser ga einmal ganz herumgedreht wird. Die halbe Peripherie gha beschreibt hierdurch eine allseitig gekrümmte Fläche, welche die Kugelfläche ist und wodurch der kugelförmige Raum ringsumher begränzt wird.

Daß jeder Punct der Kugelfläche von ihrem Mittelpuncte gleiche Entfernung hat, geht schon daraus hervor, weil er als ein Punct des die Kugel erzeugenden Kreises betrachtet werden kann, worin alle Peripheriepuncte vom Centrum gleichen Abstand haben.

Zieht man aus c das Loth ch auf ga und aus b das Loth bd, so beschreiben dieselbe bei der Umdrehung des Halbkreises zwei Parallelkreise, wovon jener der größte Kreis der Kugel, dieser aber ein kleinerer ist.

II. Ausser der Kugel verdienen noch die früher genannten regelmäßigen Körper nach ihrer Entstehung etwas näher betrachtet zu werden.

Der einfachste von ihnen ist das Tetraëder. Es sei dpg (Fig. 61.) ein gleichseitiges Dreieck, worin dq = pq, pm = gm und gn = dn genommen, auch qm, mn und nq gezogen ist, so wird jedes der Dreiecke dqn, qpm, nqm und nmg gleichseitig und dem andern congruent seyn.

Nimmt man nun an, jedes der äusseren Dreiecke dqn, pqm und gmn werde um seine Grundlinie qn, qm und mn so gedreht, daß sich die Spitzen d, p und g über die gemeinsame Ebene erheben, so werden dieselbe einmal in einem Puncte zusammentreffen, wodurch ein von vier congruenten gleichseitigen Drei-

ecken umschlossener Körper gebildet wird, welcher das Tetraëder oder die regelmäßige dreiseitige Pyramide ist. Er hat ringsumher vier Körperwinkel, deren jeder von drei gleichen ebenen Winkeln (jeder = 60°) begränzt ist.

III. Zur Construction des Octaëders denke man sich das Quadrat dacg (Fig. 62.), beschreibe über jeder Seite desselben ein gleichseitiges Dreieck dma, abc, cpg und gqd, und nehme nun an, jedes derselben drehe sich um die ihm zur Grundlinie dienende Quadratseite dergestalt, daß sich einmal die vier Scheitelpuncte m, q, p und b in einer Spitze vereinigen, so entsteht eine vierseitige, von einem Quadrate und vier congruenten gleichseitigen Dreiecken umschlossene senkrechte Pyramide, welche, wenn sie noch einmal nach entgegengesetzter Seite an die quadratische Grundfläche gestellt wird, das Octaëder, d. h. einen von acht congruenten gleichseitigen Dreiecken gebildeten Körper erzeugt.

Die Construction des Icosaëders und des Dodecaëders muß hier übergangen werden; doch kann man angeben, wie diese Körper aus ihrem sogenannten Netze gebildet werden.

IV. Daß es nur fünf regelmäßige Körper geben könne, läßt sich folgender Gestalt übersehen. Da jeder regelmäßiger Körper von congruenten, regulären Figuren gebildet wird, welche an ihren Scheitelpuncten gleiche Körperwinkel bilden und das gleichseitige Dreieck die einfachste regelmäßige Figur ist, so muß dieses zuerst als mögliche Seitenfläche betrachtet werden.

Da der Winkel dieses Dreiecks 60 Grade beträgt und die Bildung eines Körperwinkels wenigstens drei ebene Winkel voraussetzt, so ist ein regelmäßiger Körper möglich, dessen Körperwinkel von drei solchen ebenen Winkeln gebildet wird. Eine solche Verbindung findet man bei dem Tetraëder, worin die, einen Körperwinkel umschließenden ebenen Winkel zusammengenommen 180 Grade betragen.

Denkt man sich vier von diesen Winkeln zu einem Körperwinkel vereinigt, so würden sie zusammen 240 Grade betragen und hierdurch jenen Winkel bilden, welchen das Octaëder zeigt.

Fügt man fünf dieser Winkel zusammen, so entsteht ein Körperwinkel, dessen fünf Seitenwinkel in der Summe 300 Grade betragen und welcher sich an dem Icosaëder befindet.

Wollte man sechs solcher Winkel zur Bildung eines Körperwinkels zusammenfügen, so würden sie zur Summe 360 Grade geben und somit nicht im Stande seyn, eine körperliche Ecke zu bilden.

Daher können von dem gleichseitigen Dreiecke, als Gränzfläche, nur die drei ebengenannten regelmäßigen Körper hervorgebracht werden.

Betrachtet man das auf das gleichseitige Dreieck zunächst folgende Quadrat als Seitenfläche eines regelmäßigen Körpers, so entsteht aus der Zusammenstellung von drei rechten Winkeln der Körperwinkel des Würfels und man erkennt sogleich, daß vier rechte Winkel keinen Körperwinkel mehr bilden können. Daher kann es nur einen regelmäßigen Körper geben, der von Quadraten begränzt ist.

Denkt man sich das regelmäßige Fünfeck als Gränzfläche, so ist sein Polygonwinkel 108 Grade. Drei dieser Winkel zusammen betragen 324 Grade und können daher einen Körperwinkel bilden. Dieser Körperwinkel findet sich bei dem Dodecaëder.

Da vier solcher Winkel 432 Grade, somit mehr, als vier Rechte betragen, so kann das regelmäßige Fünfeck keinen andern regelmäßigen Körper begränzen.

Auch ist von dem regelmäßigen Sechsecke als Gränzfläche kein regulärer Körper denkbar, da drei Winkel dieses Polygons genau 360 Grade betragen und somit in eine Ebene fallen.

Daher sind nur fünf regelmäßige Körper möglich: das Tetraëder, Octaëder, Icosaëder, der Würfel und das Dodecaëder.

§. 6.

Uebungs-Fragen.

I. Wie wird das senkrechte und schiefe dreieckige Prisma construirt? Beweis der Richtigkeit? Andere Entstehungsarten dieser Körper? Wie wird das Parallelopipedum und jede seiner Arten construirt? Beweis der Richtigkeit dieser Constructionen? Andere Entstehungsweisen dieser Körper? Allgemeine Entstehung jedes vielseitigen eckigen prismatischen Körpers? (§. 1.)

II. Wie entsteht der senkrechte Cylinder? Beweis der Richtigkei? Andere Entstehungsarten dieses Körpers? Eben dieses für den schiefen Cylinder? Entstehung anderer prismatischer rundlicher und eckiger Körper? (§. 2.)

III. Entstehung der senkrechten und schiefen dreieckigen Pyramiden? Beweis der Richtigkeit? Wie entsteht die vierseitige und vieleckige Pyramide? Andere Entstehungsarten dieser Körper? (§. 3.)

IV. Wie entsteht der senkrechte Kegel? Beweis der Richtigkeit? Wie entsteht der schiefe Kegel? Welcher Kegel ist gleichseitig, welcher ungleichseitig? Was entsteht, wenn sich ein rechtwinkeliges Dreieck um seine Hypotenuse herumbewegt? Was entsteht, wenn ein schiefwinkeliges Dreieck sich um eine Seite dreht? Wie entstehen andere rundliche kegelförmige Körper? (§. 4.)

V. Wie entsteht die Kugel? Erklärung der bei der Kugel entstehenden Anschauungen? Bestimmung der hierauf gegründeten Begriffe? — Wie entsteht das Tetraëder? Erklärung dieses Körpers? Warum ist er ein regelmäßiger Körper? Wie entsteht das Octaëder? Erklärung dieses Körpers? In welche Körper kann das Octaëder zertheilt werden? Warum ist es ein regelmäßiger Körper? — Entstehung des Würfels, als Gattung des Parallelopipedums? Entstehung Icosaëders und Dodecaëders aus ihren Netzen? In welche Körper können dieselbe getheilt werden? Wie können dieselbe aus diesen Bestandtheilen zusammengesetzt werden? Warum kann es nur fünf regelmäßige Körper geben? (§. 5.)

Sechster Lehrgang.

Wissenschaftliche Entwickelung der stereometrischen Raumverhältnisse.

I. Lehrübung.

Raumverhältnisse der prismatischen Körper.

§. 1.

Parallelopipeden und dreiseitige Prismen.

I. Wenn irgend ein Parallelopipedum gegeben ist, so kann dasselbe durch einen Diagonalschnitt in zwei dreieckige Prismen getheilt werden.

Es sei (Fig. 63.) dq das gegebene Parallelopipedum, so wird dasselbe durch den Diagonalschnitt dfqm in zwei dreieckige Prismen dfamqh und fdgqmp getheilt.

Es entsteht hier zuerst die Frage: ob die Diagonale df in der Oberfläche mit der Diagonale mq in der Grundfläche in der nämlichen Ebene sich befindet. Daß dieses wirklich so sei, geht sogleich daraus hervor, daß jede der zwei Seitenkanten dm und fq mit der Kante ah parallel ist, wodurch auch dm mit fq gleichlaufend seyn, d. h. sich mit ihr in der nämlichen Ebene befinden muß. Daher ist dfqm ein Parallelogramm

Daß nun jedes der beiden Stücke, in welche der ganze Körper getheilt wird, ein dreieckiges Prisma ist, bedarf keines weiteren Beweises, da derselbe aus dem Bisherigen sehr einfach hervorgeht.

Das gegebene Parallelopipedum könnte auch noch auf andere Weise, z. B. durch die Diagonalen fh und gm, oder durch aq und dp, oder durch ag und hp u. s. f. in zwei dreieckige Prismen zertheilt werden.

II. Wenn zwei Parallelopipeden auf der nämlichen Grundfläche stehen und ihre Oberflächen sich in der nämlichen Parallelebene mit dieser Grundfläche befinden, so sind beide Körper gleich am Inhalte, obwohl sie an Gestalt verschieden sind.

Es befinden sich über der Grundfläche gbpc (Fig. 64.) sowohl das Parallelopipedum pn, als das zweite ca dergestalt, daß die Oberflächen nmhq und mafh mit der Grundfläche parallel, auch die Höhen beider Körper d. h. die von ihren Oberflächen auf die Grund-

fläche gezogenen Lothe einander gleich sind. Ferner sei die Seitenfläche mgch des zweiten zugleich auch die Diagonalebene des ersten und die Seitenfläche qhpc liege mit der Seitenfläche hfpc in einerlei Ebene.

Da diese Lage der beiden Körper die einfachste ist, so kann man sie die erste nennen, und erkennt auch sogleich, daß der Diagonalschnitt mhcg den Körper np in zwei dreieckige Prismen hqcmng und hpcmhg theilt, sowie auch die Diagonalebene mhph den Körper np in zwei dreieckige Prismen ambfhp und mhghpc zerlegt.

Betrachtet man die zwei dreieckigen Prismen mnghqc und ambfhp, so erkennt man sehr leicht, daß sie einander vollkommen congruent sind, da alle ähnlich liegenden Körperwinkel einander gleich und alle ähnlich liegenden Gränzflächen congruent sind.

Wird nun zu jenem dreieckigen Prisma das Prisma mhghpc gesetzt, so entsteht das Parallelopipedum np. Fügt man aber dem zweiten dreieckigen Prisma das ebengenannte Prisma bei, so entsteht das Parallelopipedum mp und es müssen somit die beiden gegebenen Parallelopipeden sich gleich am körperlichen Raume seyn.

Die zweite Lage der beiden Parallelopipeden besteht darin, daß sich über der Grundfläche hoqp (Fig. 65.) das erste qh und das zweite qc so befindet, daß die Oberflächen hdga und cqfm in einer Parallelebene mit hoqp liegen, daß ferner die Seitenfläche cmph des zweiten nicht Diagonalebene des ersten ist, sondern ganz in dasselbe hineinfällt, und daß endlich

die Seitenflächen agqp und mfqp in einer einzigen Ebene afqp liegen.

Hier sieht man sogleich, daß die Körper cbbmap und vdofgq zwei sich vollkommen deckende dreieckige Prismen sind, da sie sowohl die Körperwinkel, als sämmtliche Gränzfläche mit einander gemein haben.

Wird nun der Körper cdobmgqp, welcher in Bezug auf die Körper etwas Aehnliches mit dem Paralleltrapeze in Bezug auf die Ebenen ist, zu jenem dreieckigen Prisma gesetzt, so entsteht das erste Parallelopipedum; fügt man ihn aber dem zweiten dreieckigen Prisma bei, so entsteht das zweite Parallelopipedum, welches somit dem ersten an Inhalte gleich ist.

Die dritte Lage erkennt man daraus, daß sich über der Grundfläche gcqb (Fig. 66.) das Parallelopipedum qn und das zweite qf so befindet, daß die Oberflächen nmhp und tfrs in einzigen mit gcqb parallelen Ebene mfrp liegen, daß ferner die Seitenfläche tsbg des zweiten die Seitenfläche mhqc des ersten Parallelopipedums in der geraden Linie ou durchschneidet, und daß endlich die Seitenflächen phqb und srqb in einerlei Ebene prqb liegen.

Nach dieser Lage der Körper ist leicht zu erweisen, daß sich die beiden dreieckigen Prismen tngspb und fmcrbq einander vollkommen decken, weil sie von gleichen Körperwinkeln und congruenten Seitenflächen umschlossen sind.

Nimmt man nun von beiden das dreieckige Prisma tmoshu hinweg, so bleibt im ersten Falle der Körper mngohpbu und im zweiten der Körper ftocrsuq übrig.

Wird nun zu jenem das dreieckige Prisma gocbuq gesetzt, so erhält man das Parallelopipedum qn; fügt man aber ebendieses Prisma dem zweiten Körper bei, so entsteht das Parallelopipedum bf, welches somit dem Vorigen gleich seyn muß.

Eine vierte Lage der beiden gegebenen Parallelopipeden ist noch dadurch möglich, daß sich keine Seitenfläche des einen in der Verlängerung der Seitenfläche des andern befindet, wie dieses bei den Parallelopipeden gb (Fig. 67.) und pt der Fall ist, welche die Grundfläche pdgq und auch die Höhe gemein haben, da ihre Oberflächen bfhc und vrts sich in einerlei Parallelebene mit jener befinden.

Werden hier die Linien bf und ch der bchf über f und h, so wie auch die Linien tr und sv der Oberfläche psvr über r und t verlängert, so schneiden sich dieselbe in vier Puncten a, n, m, o und bilden das Parallelogramm moan, welches der Grundfläche pqgd ebenfalls congruent ist.

Zieht man nun die Verbindungslinien np, aq, og und md, so entsteht ein Parallelopipedum po, welches sowohl dem Parallelopipedum pt, als dem andern gb, nach einem der drei vorigen Fälle, gleich seyn muß. Daher ist auch das Parallelopipedum pt dem Parallelopipedum gb gleich.

Hieraus folgt nun der allgemeine Satz: **Wenn zwei Parallelopipeden über der nämlichen Grundfläche stehen und die senkrechten Höhen gemein haben, so sind sie gleich am körperlichen Inhalte.**

III. Wenn man ein senkrechtes Parallelopipedum durch den Diagonalschnitt in zwei dreieckige Prismen theilt, so ist jedes dem andern congruent.

Es werde (Fig. 63.) das senkrechte Parallelopipedum dafsgmhqp durch die Diagonalebene dfqm in zwei dreieckige Prismen dfamqh und fdgqmp getheilt, so sind beide congruent.

Man erkennt sogleich, daß die Flächen gdf und pmq, dfa und mqh congruente Dreiecke sind; sowie auch, daß eben dieses von den Seitenparallelogrammen paarweise gilt. Da nnn die vier Seitenkanten gp, dm, ah und fq auf der Grund- und Oberfläche lothrecht stehen, so sind auch alle einzelne Körperwinkel einander gleich und beide dreieckigen Prismen können so in einander gestellt werden, daß sie nur ein einziges bilden.

IV. Wenn ein schiefes Parallelopipedum durch den Diagonalschnitt in zwei dreieckige Prismen getheilt wird, so können dieselben nicht so in einander gestellt werden, daß sie sich decken.

Es sei (Fig. 68.) bq ein gegebenes schiefes Parallelopipedum und bdqm seine Diagonalebene, so werden die dreieckigen Prismen bdamqh und dbgqmp einander nicht congruent seyn.

Obwohl auch hier in den beiden Körpern die gesammten Umfangsflächen einander paarweise congruent, auch die sämmtlichen Körperwinkel von gleichvielen unter sich gleichen Seitenwinkeln begränzt sind, so können dennoch die zwei Prismen nicht so in einander gestellt werden, daß sie nur ein einziges bilden, weil ihre Seitenkanten eine schiefe Lage gegen die

Grund- und Oberfläche haben, wodurch das wirkliche Decken der Körperwinkel bei a und p, bei g und h sowie auch bei b und q und bei d und m unmöglich wird.

Wem dieses nicht aus der Zeichnung anschaulich ist, der wird wohl thun, sich aus irgend einer leicht-schneidbaren Materie ein schiefes Parallelopipedum zu bilden und dasselbe durch den Diagonalschnitt in zwei dreieckige Prismen zu zerlegen, deren genauere Betrachtung zeigt, daß sie nicht congruent, aber symmetrisch gebildet sind.

V. Wenn ein schiefes Parallelopipedum durch den Diagonalschnitt getheilt wird, so sind die zwei entstehenden dreieckigen Prismen gleich am körperlichen Inhalte.

Es sei (Fig. 69, a.) bacdfmgh das gegebene schiefe Parallelopipedum und bcgf dessen Diagonalschnitt, so soll bewiesen werden, daß das Prisma bcafgm dem Prisma cbdgfh am Körperraume gleich sei.

Man nehme in der Seitenkante dr einen willkührlichen Punct q und schneide mit einer auf dg lothrecht stehenden Ebene das schiefe Parallelopipedum, so entsteht das Parallelogramm qpno, auf dessen Ebene auch die Kanten bp, an und co lothrecht sind und welches durch die Diagonale po in zwei congruente Dreiecke getheilt wird.

Verlängert man nun qb nach r bis hr = dq; pf nach t bis ft = bp; am nach s bis ms = an; ferner cg nach v, bis gv = co ist, und zieht nun die Verbindungslinie rt, ts, sv und vr, sowie auch die Diagonale tv, so muß der hierdurch entstandene

Körper rm dem Körper qa' vollkommen congruent seyn.

Daher ist nun das senkrechte Parallelopipedum vp dem gegebenen schiefen Parallelopipedum gb gleich am Inhalte, allein das senkrechte wird durch den Diagonalschnitt povt in zwei sich deckende Prismen pontvs und opqvtr getheilt, und es ist ferner, wie man leicht sieht, das Prisma pontvs dem Prisma bcafgm; sowie auch das Prisma qportv dem Prisma dbchfg gleich am Inhalte. Daher muß auch das Prisma bcafgm dem Prisma dbchfg gleich seyn.

Dieser Lehrsatz, welcher einer von den wichtigsten der Stereometrie ist, bildet in den Elementen des Euclides den acht und zwanzigsten Satz im eilften Buche und ist daselbst unzureichend bewiesen, da Euclides nur vom Diagonalschnitte eines senkrechten Parallelopipedums spricht. Geschichtliche Nachrichten, sowie auch mehrere Beweise von demselben findet man in meiner Abhandlung: Der acht und zwanzigste Satz des eilften Buches der Elemente des Euclides, geprüft und neu erwiesen. Mainz 1818 bei Kupferberg, 33 S. 4to mit einer Steintafel.

VI. Wenn zwei dreieckige Prismen die Grundfläche und Höhe mit einander gemein haben, so sind sie, auch bei ganz verschiedenen Gestalten, gleich am Inhalte.

Es ist leicht, zu jedem der zwei gegebenen Prismen das ihm zugehörige Parallelopipedum zu ergänzen, von welchem es die Hälfte ist. Da aber diese beiden Parallelopipeden, weil sie Grundfläche und Höhe gemein haben, gleich am Inhalte sind, so müs-

sen es auch die dreieckigen Prismen als ihre Hälften seyn.

Hieraus fließet die Auflösung der Aufgabe: ein dreieckiges Prisma in ein ihm gleiches Parallelopipedum von der nämlichen Höhe, oder von der halben Höhe des Prismas zu verwandeln; sowie auch umgekehrt jedes Parallelopipedum in ein ihm gleiches dreieckiges Prisma von der doppelten Höhe oder von der doppelten Grundfläche verwandelt werden kann.

Es ist leicht, diese Aufgaben durch wirkliche Zeichnungen zu erläutern, was als Uebung empfohlen wird.

VII. Wenn zwei senkrechte oder unter gleichen Kantenwinkeln geneigte Parallelopipeden auf der nämlichen Grundfläche stehen und verschiedene Höhen haben, so stehen ihre körperlichen Inhalte im geraden Verhältnisse dieser Höhen.

Ueber der Grundfläche nq (Fig. 70, a.) befindet sich das Parallelopipedum nd und das zweite ng; sie seien senkrecht und an, bn stellen ihre Höhen vor, so verhält sich nd : ng = na : nb.

Es ist bekannt, daß die geraden Linien na und nb mit einem gemeinschaftlichen Maße meßbar sind. Dieses Maß sei nm. Legt man durch m eine Durchschnittsebene, welche mit nq gleichlaufend ist, so entsteht ein kleines Parallelopipedum mq, welches als gemeinschaftliches Maß von nd und von ng betrachtet werden kann. Denn wäre z. B. nm in na siebenmal und in nb zwölfmal enthalten, so würde nd von sieben, ng aber von zwölf solcher kleinen Parallelopi-

peden in mq vollkommen ausgefüllt werden und es wäre nd : ng = 7 : 12.

Da dieser Beweis allgemein ist, so muß auch im Allgemeinen nd : ng = na : nb seyn.

Man überzeugt sich bald, daß die Grundflächen dieser zwei Parallelopipeden nicht congruent, sondern nur gleich an Größe zu seyn brauchen, da der körperliche Raum eines Parallelopipedums durch die Größe seiner Grundfläche und Höhe bestimmt wird. Daher stehen irgend zwei Parallelopipeden von gleichgroßen Grundflächen, ihrem Inhalte nach, im geraden Verhältnisse ihrer senkrechten Höhen.

VIII. Wenn zwei Parallelopipeden einerlei Höhen, aber verschiedene Grundflächen haben, so stehen ihre Räume im geraden Verhältnisse dieser Grundflächen.

Es seien (Fig. 71.) dh und dp zwei senkrechte Parallelopipeden von der nämlichen Höhe dn und von den verschiedenen Grundflächen nh und np, so ist dh : dp = nh : np.

Da gh und gp zwei gerade Linien sind, so haben sie wiederum ein gemeinsames Maß. Wenn dieses gf ist, so lege man durch f mit der Seitenfläche gd die Parallelebene fb, wodurch das kleine Parallelopipedum df gebildet wird.

So oft nun gf in gh enthalten ist, ebenso oft wird der Körper df in dh enthalten seyn; wie oft aber gf in gp enthalten ist, ebenso oft muß df in dp enthalten seyn. Wäre z. B. gh = 8 gf und gp = 15 gf, so müßte auch dh : dp = 8 : 15 seyn. Nun ist aber auch gh : gp = nh : np folglich hat man dh : dp = nh : np.

Man sieht leicht, daß dieses Verhältniß ganz allgemein bewiesen ist, und daß ebendasselbe stattfindet, wenn beide Parallelopipeden bei schiefen Seitenkanten einerlei Höhe und verschiedene Grundflächen haben. Diese Fälle können jedesmal leicht auf den vorigen zurückgeführt werden.

IX. Wenn zwei Parallelopipeden verschiedene Grundfläche und Höhe haben, so stehen ihre Körperräume in einem zusammengesetzten Verhältnisse aus dem Geraden ihrer Grundflächen und Höhen.

Es sei die Grundfläche des ersten Parallelopipedums $= G$, dessen Höhe $= H$; die Grundfläche des zweiten $= g$, seine Höhe $= h$, so ist jenes zu diesem $= GH : gh$.

Wenn jenes Parallelopipedum P, dieses p heißt, so denke man sich ein drittes π, welches mit jenem die Grundfläche G und mit diesem die Höhe h gemein hat. Hier ist

$$P : \pi = H : h \text{ und}$$
$$\pi : p = G : g \text{ folglich}$$
$$P : p = HG : hg.$$

Wollte man hier den Einwurf machen, ein Product aus Grundfläche in Höhe könnte deßhalb nicht gebildet werden, weil man keine Fläche mit einer Linie multipliciren kann, so ist klar, daß Fläche und Linie hier nicht als solche, sondern nur nach ihrem Zahlenwerthe betrachtet werden.

X. Sollen daher zwei Parallelopipeden von verschiedenen Grundflächen und verschiedenen Höhen gleich am Körperraume seyn, so muß $GH = gh$ und folglich $G : g = h : H$ seyn, d. h. es müssen sich hier

die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen verhalten, oder die Grundfläche des ersten muß sich so zur Grundfläche des zweiten verhalten, wie sich die Höhe des zweiten zur Höhe des ersten verhält.

Hieraus folgt, daß Grundfläche und Höhe die zwei Elemente sind, wovon der körperliche Inhalt der Parallelopipeden abhängt; so, daß ein Product aus beiden die Verhältnißzahl dieses Inhaltes bestimmt.

Es ist demnach leicht, ein gegebenes Parallelopipedum in ein ihm gleiches von verschiedener Grundfläche und Höhe zu verwandeln. Da z. B. $6 \times 8 = 4 \times 12 = 3 \times 16$ ist, so müssen Parallelopipeden von der Grundfläche 6 und der Höhe 8, von der Grundfläche 4 und der Höhe 12, von der Höhe 3 und der Grundfläche 16, oder auch von der Höhe 16 und der Grundfläche 3, von der Höhe 12 und der Grundfläche 4, von der Höhe 8 und der Grundfläche 6 gleich am Inhalte seyn.

Da die dreieckigen Prismen die Hälften von den ihnen zugehörigen Parallelopipeden sind, so müssen auch die von den letzteren bewiesenen Sätze auf gleiche Art von ersteren gelten. Daher verhalten sich dreieckige Prismen von gleichen Grundflächen wie ihre Höhen und von gleichen Höhen wie ihre Grundflächen. Bei verschiedenen Grundflächen und Höhen sind ihre Inhalte in einem zusammengesetzten Verhältnisse dieser Grundflächen und Höhen. Wenn aber die Grundflächen dreieckiger Prismen im umgekehrten Verhältnisse ihrer Höhen sind, so müssen diese Körper gleich am Inhalte seyn.

§. 2.

Vielkantige Prismen und Cylinder.

I. Jedes vielkantige Prisma kann in soviele dreieckige Prismen getheilt werden, als die Zahl seiner Ecken beträgt, weniger zwei.

Es sei tpqm n (Fig. 69, b.) ein fünfeckiges Prisma, so kann dasselbe in 5—2 d. h. in drei dreieckige Prismen zertheilt werden.

Da die Kanten na und pd, einzeln genommen, mit tg gleichlaufend sind, so müssen sie auch unter sich parallel seyn und somit in einerlei Ebene liegen. Daher kann durch npda eine Durchschnittsebene gelegt werden, welche das dreieckige Prisma ntpagd von dem gegebenen abschneidet; so, daß noch das viereckige Prisma npqmadcb übrig bleibet.

Da sowohl na als qc mit mb parallel ist, so muß auch na mit qc in einerlei Ebene liegen, und die Durchschnittsfläche nqca bildet aus dem viereckigen Prisma die zwei dreieckigen npqadc und nmqabc.

Da sowohl die Grundfläche als die Oberfläche des gegebenen Körpers noch auf andere Weise durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt werden kann, so läßt sich auch das fünfeckige Prisma noch auf andere Arten in dreieckige abtheilen, und es ist leicht, alle hier möglichen Fälle durch die Anschauung aufzuklären.

Ueberhaupt geht hieraus hervor, daß jedes n eckige Prisma durch Diagonalschnitte in n—2 dreieckige Prismen zertheilt werden kann.

II. Wenn zwei vieleckige Prismen von gleich vielen Ecken congruente Grundflächen und einerlei

senkrechte Höhe haben, so sind sie gleich am körperlichen Inhalte.

Denn, wenn jeder dieser Körper durch homologe d. h. durch ähnlich liegende Winkelpuncte gezogene Diagonalschnitte in dreieckige Prismen zertheilt wird, so wird jedes einzelne derselben dem ihm entsprechenden am Inhalte gleich seyn, weil sie Grundfläche und Höhe gemein haben. Da aber die Zahl dieser dreieckigen Prismen in beiden Körpern dieselbige ist, so müssen die aus gleichvielen und gleich großen Bestandtheilen bestehenden Summen d. h. die gegebenen Körper einander gleich seyn.

III. Auch stehen vielkantige Prismen von gleicher Seitenzahl im zusammengesetzten Verhältnisse aus ihren Grundflächen und Höhen; sind die Grundflächen gleich, so verhalten sie sich wie die Höhen und bei gleichen Höhen wie die Grundflächen. Denn diese Verhältnisse gelten von den dreieckigen Prismen woraus beide Körper hier in gleicher Anzahl bestehen.

Wenn Prismen von ungleicher Seitenzahl einerlei Grundfläche und Höhe haben, so sind sie ebenfalls gleich am Inhalte.

Denn alle dreieckigen Prismen, welche aus den Diagonalschnitten des einen entstehen, geben, doppelt genommen, ein Parallelopipedum, welches jenem aus dem Doppelten aller dreieckigen Prismen des andern gleich ist, weil diese zwei Parallelopipeden Grundfläche und Höhe gemein haben. Da nun die Hälften gleicher Ganzen ebenfalls gleich sind, so müssen auch die gegebenen ungleich vielkantigen Prismen gleich am Körperraume seyn.

Es folgt daher im Allgemeinen der Satz: Alle eckige prismatischen Körper stehen im zusammengesetzten Verhältnisse aus ihren Grundflächen und senkrechten Höhen; sie verhalten sich bei gleichen Grundflächen wie ihre Höhen, und bei gleichen Höhen wie ihre Grundflächen.

Durch Anwendung dieses Satzes ist es leicht, irgend einen eckigen prismatischen Körper in ein anderes Prisma von anderer Seitenzahl oder von anderer Grundfläche und Höhe zu verwandeln.

IV. Wenn zwei Cylinder die Grundfläche und Höhe mit einander gemein haben, so sind sie gleich am Inhalte.

Da man die Kreise als regelmäßige Vielecke von sehr vielen Seiten betrachten kann, so stellen die beiden Cylinder zwei eckige prismatische Körper von unzählig vielen Seiten vor. Da aber solche Prismen, wenn sie einerlei Grundfläche und Höhe haben, auch gleich am Inhalte sind, so müssen es auch die beiden gegebenen Cylinder seyn.

Daher werden alle bisher bewiesenen Verhältnisse, welche von eckigen prismatischen Körpern gelten, auch auf Cylinder anwendbar seyn.

V. Wenn daher zwei Cylinder gleiche Grundflächen haben, so verhalten sie sich wie ihre Höhen, und, wenn sie gleiche Höhen haben, wie ihre Grundflächen.

Wenn bei zwei Cylindern Grundflächen und Höhen verschieden sind, so stehen ihre Inhalte im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen.

Haben daher zwei Cylinder gleichen Körperinhalt, so müssen ihre Grundflächen im verkehrten Verhältnisse ihrer Höhen stehen und umgekehrt.

Um daher zwei oder mehrere Cylinder von einerlei Höhen in einen einzigen von der nämlichen Höhe zu verwandeln, welcher ihnen zusammengenommen gleich ist, darf man nur einen Kreis construiren, welcher so groß ist, als alle gegebene Grundflächen zusammengenommen, und über diesen einen Cylinder von der nämlichen Höhe errichten. Auf gleiche Weise kann mehrere Cylinder von gleichen Grundflächen und von verschiedenen Höhen in einen einzigen, der ihnen zusammengenommen gleich ist und die nämliche Grund-Grundfläche hat, umwandeln. Man darf über diese Grundfläche nur einen Cylinder construiren, dessen Höhe so groß ist, als die Summe aller einzelnen Höhen der gegebenen Cylinder.

Auch kann man den Unterschied zweier Cylinder von gleichen Höhen in einen einzigen Cylinder von der nämlichen Höhe verwandeln, wenn die Differenz ihrer Grundflächen nach dem pythagoräischen Lehrsatze in einen Kreis verwandelt und darüber ein Cylinder von der nämlichen Höhe errichtet wird.

Noch leichter kann man den Unterschied zweier Cylinder von einerlei Grundfläche, aber verschiedenen Höhen in einen einzigen von derselbigen Grundfläche verwandeln.

Endlich kann auch jeder Cylinder in einen andern ihm gleichen von verschiedener Grundfläche und Höhe dadurch verwandelt werden, daß man die Grundfläche des neuen n mal kleiner, seine Höhe aber n mal größer,

als jene des gegebenen macht. Denn dadurch werden sich ihre Grundflächen umgekehrt wie die Höhen verhalten, und daher ihre Inhalte gleich seyn.

VI. Es ist daher folgender ganz allgemeine Satz bewiesen: Die prismatischen, sowohl eckigen als cylindrischen Körper stehen nach ihrem Inhalte im zusammengesetzten Verhältnisse aus ihren Grundflächen und Höhen; sie verhalten sich bei gleichen Grundflächen wie die Höhen und bei gleichen Höhen wie die Grundflächen.

Durch Anwendung dieses Satzes ist es leicht, eckige prismatische Körper in runde, oder runde in eckige so zu verwandeln, daß unter ihnen irgend ein bestimmtes Verhältniß ihrer Größe besteht.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Was nennt man bei einem gegebenen Parallelopipedum den Diagonalschnitt? Warum liegen die homologen Diagonallinien der Oberfläche und der Grundfläche in einerlei Ebene? Was sind die aus dem Diagonalschnitte entstehenden zwei Theile? Wievielerlei solcher Schnitte sind möglich? Wann sind zwei Parallelopipeden gleich am Inhalte? Wieviele Fälle treten in Hinsicht der Lage dieser Körper ein? Darstellung derselben durch Zeichnungen? Beweise aller Fälle? Was sind die Theile, welche aus dem Diagonalschnitte eines senkrechten Parallelopipedums entstehen? Warum sind sie einander congruent? Was entsteht auf ähnliche Art aus dem schiefen Parallelopipedum? Warum sind diese zwei Prismen symmetrische? Warum gleich am Inhalte? Wie hat Euclides diesen Lehrsatz erwiesen? Wann sind zwei dreieckige Prismen bei verschiedenen Gestalten gleich am Inhalte?

Wie wird ein gegebenes Parallelopipedum in ein ihm gleiches dreieckiges Prisma verwandelt, und umgekehrt? Wie verhalten sich zwei Parallelopipeden von gleichen Grundflächen, wie von gleichen Höhen; wie endlich bei verschiedenen Grundflächen und verschiedenen Höhen? Wann sind diese Körper, bei verschiedenen Grundflächen und verschiedenen Höhen, gleich am Inhalte? Gegebene Parallelopipeden in andere von verschiedener Grundfläche und Höhe zu verwandeln? Eben diese Sätze auf dreieckige Prismen anzuwenden? (§. 1.)

II. Was nennt man bei vieleckigen Prismen Diagonalebenen? Wie können solche Prismen durch Diagonalebenen getheilt werden? Auf wieviele Arten kann dieses geschehen? Wann sind vieleckige Prismen gleich am Körperinhalte? Wie verhalten sie sich bei gleichen Grundflächen und wie bei gleichen Höhen? Wie bei verschiedenen Grundflächen und Höhen? Wann sind sie bei verschiedenen Grundflächen und Höhen gleich am Inhalte? Wie verhalten sich Cylinder von gleichen Grundflächen? Wie verhalten sie sich bei gleichen Höhen? Wie bei verschiedenen Grundflächen und verschiedenen Höhen? Wann sind sie in diesem Falle gleich am Inhalte? Wie können zwei oder mehrere Cylinder von gleicher Höhe in einen einzigen, ihnen gleichen, von derselbigen Höhe verwandelt werden? Wie wird der Unterschied zweier Cylinder von gleicher Höhe durch einen Cylinder von der nämlichen Höhe ausgedrückt? Wie kann ein Cylinder 2mal, 3mal . . . nmal größer oder kleiner werden? Wie können eckige prismatische Körper in Cylinder, cylindrische Körper in eckige von gleichem Inhalte verwandelt werden? Wie geschieht dieses, wenn unter dem Inhalte dieser Körper ein bestimmtes Verhältniß bestehen soll? Worauf beruhet die Richtigkeit dieser Verwandlungen? (§. 2.)

II. Lehrübung.

Raumverhältnisse der pyramidalischen Körper und der Kugel.

§. 1.

Pyramiden und Kegel.

I. Wenn eine dreieckige Pyramide durch eine Ebene parallel mit der Grundfläche geschnitten wird, so gibt die Durchschnittsfläche ein Dreieck, welches der Grundfläche ähnlich ist.

Es sei dboa (Fig. 70, b.) die gegebene dreieckige Pyramide und gnh das aus dem parallelen Durchschnitte entstehende Dreieck, so ist dieses dem Dreiecke boa ähnlich.

Da die Ebene gnh mit boa parallel ist, so muß auch gh mit ba, gn mit bo und nh mit oa gleichlaufend seyn. Daher ist dn : do = ng : ob und dn : do = nh : oa, folglich auch ng : ob = nh : oa. Da aber auch dg : db = gn : bo und dg : db = gh : ba, so ist gn : bo = gh : ba und folglich auch gn : nh : hg = bo : oa : ab. Daher haben die Dreiecke gnh und boh proportionale Seiten und sind einander ähnlich.

Auf ähnliche Weise wird auch bei vieleckigen Pyramiden das aus dem Parallelschnitte entstehende Vieleck der Grundfläche ähnlich seyn.

II. Wenn zwei dreieckige Pyramiden Grundfläche und Höhe gemein, aber ungleiche Neigungen ihrer Seitenkanten haben, so sind sie, bei verschiedener Gestalt, gleich am Körperraume.

Es seien dboa (Fig. 70, b.) und nmfg die zwei gegebenen Pyramiden, deren gleiche Grundflächen boa und mfg in einerlei Ebene liegen und deren Spitzen d und n eine mit dieser Ebene gleichlaufende Linie dn geben, so werden beide gleich am Inhalte seyn.

Wenn man die beiden Körper durch eine mit den Grundflächen parallellaufende Ebene und sehr nahe bei ihnen schneidet, so entstehen die Dreiecke cvw und uhp, unter sich gleich am Inhalte und jedes der ihm entsprechenden Grundfläche ähnlich.

Da die Durchschnittsebene sich sehr nahe bei der Grundfläche befindet, so kann man die Körper cvwboa und uhpmfg als zwei dreieckige Prismen betrachten, welche, da sie Grundfläche und Höhe gemein haben, auch gleich am Inhalte sind. Auf gleiche Weise wird man ferner, sowohl in der Pyramide dboa als in nmfg, durch Wiederholung dieser Durchschnitte ähnliche Prismen von gleichem Inhalte bilden können. Da nun aus jener Pyramide ebensoviele kleine Prismen wie aus dieser gebildet werden können, indem beide einerlei Höhe haben, so bestehen die gegebenen Pyramiden aus gleichvielen, unter sich gleich großen Bestandtheilen und müssen daher einander gleich seyn.

III. Jedes dreieckige Prisma kann in drei dreieckige Pyramiden getheilt werden, welche gleich am Inhalte sind.

Es sei gchdfb (Fig. 71.) das gegebene dreieckige Prisma, so kann dasselbe in drei dreieckige Pyramiden von einerlei Inhalte getheilt werden.

Da die Puncte c, d und b in einerlei Ebene liegen, so denke man sich durch dieselbe eine Ebene

gelegt, welche von dem dreieckigen Prisma die dreieckige Pyramide cdfb abschneiden wird, und die Anschauung lehrt, daß die vierseitige Pyramide ghbdc übrig bleibt. Da aber durch die Puncte c, d und h wieder eine schneidende Ebene gelegt werden kann, welche diese viereckige Pyramide in zwei dreieckige dghc und dbhc theilt, so besteht das gegebene Prisma aus drei dreieckigen Pyramiden.

Da die beiden Theile der viereckigen Pyramide ghbdc, wie man leicht sieht, Grundfläche und Höhe gemein haben, so sind beide gleich am Inhalte.

Betrachtet man nun bei der dreieckigen Pyramide dghc das Dreieck gch als Grundfläche und d als Spitze, so ist klar, daß diese Pyramide mit der zuerst erhaltenen cdfb ebenfalls Grundfläche und Höhe gemein hat. Daher sind auch diese zwei Pyramiden einander gleich, und das dreieckige Prisma besteht aus drei gleich großen Pyramiden.

IV. Da also jede dreieckige Pyramide der dritte Theil von einem dreieckigen Prisma ist, welches Grundfläche und Höhe mit ihr gemein hat, so müssen auch alle Größenverhältnisse, welche bisher von dreieckigen Prismen bewiesen wurden, auf gleiche Art von den dreieckigen Pyramiden gelten. Denn die Drittheile verhalten sich so wie die Ganzen.

Wenn daher zwei dreieckige Pyramiden auf gleicher Grundfläche stehen, so verhalten sie sich wie ihre Höhen; bei gleichen Höhen aber stehen sie im Verhältnisse ihrer Grundflächen.

Auch sind dreieckige Pyramiden überhaupt, bei verschiedenen Höhen und Grundflächen, im zusammen-

gesetzten Verhältnisse aus Grundflächen und Höhen. Daher sind sie gleich am Inhalte, wenn ihre Höhen im verkehrten Verhältnisse ihrer Grundflächen stehen.

V. Jede vieleckige Pyramide kann in soviele dreieckige getheilt werden, als wie viele Seiten ihre Grundfläche hat, weniger zwei.

Man denke z. B. eine vierseitige Pyramide, ziehe in ihrer Grundfläche eine Diagonale und schneide diesen Körper mit einer Ebene, welche durch die Spitze und durch diese Diagonale gehet, so ist klar, daß die viereckige Pyramide hierdurch in zwei dreieckige getheilt wird.

Wäre eine fünfeckige Pyramide gegeben, so könnte sie durch die Spitze und durch jede der zwei Diagonalen der Grundfläche so getheilt werden, daß man drei dreieckige Pyramiden erhält.

Da nun jedes geradlinige n Eck durch Diagonalen in n — 2 Dreiecke getheilt werden kann, so ist klar, daß jede n eckige Pyramide ebenfalls in n — 2 dreieckige zerlegt werden kann.

Sowie die Grundfläche durch verschieden gezogene Diagonalen in andere Dreiecke getheilt wird, so kann man auch die vieleckige Pyramide durch andere Diagonalschnitte in andere Pyramiden zerlegen.

VI. Die Größenverhältnisse, welche von dreieckigen Pyramiden angegeben wurden, sind nunmehr auch auf alle vieleckigen anwendbar, da die letzteren als Summen von ersteren erscheinen.

Daher verhalten sich vieleckige Pyramiden überhaupt, bei gleichen Grundflächen, wie die Höhen und bei gleichen Höhen wie ihre Grundflächen; auch stehen

bei verschiedenen Grundflächen und Höhen ihre Inhalte im zusammengesetzten Verhältnisse aus Grundfläche und Höhe, und sind demnach einander gleich, wenn sich ihre Grundflächen umgekehrt, wie die Höhen verhalten.

Auch ist es leicht, mehrere Pyramiden von verschiedenen Grundflächen und gleichen Höhen, oder von verschiedenen Höhen und einerlei Grundfläche in eine einzige ihnen zusammengenommen gleiche zu verwandeln, welche mit ihnen die Höhe oder Grundfläche gemein hat. Ebenso kann jede Pyramide sehr einfach n mal größer, oder n mal kleiner gemacht werden.

Da Pyramiden als Drittheile der ihnen angehörigen Prismen zu betrachten sind, so lassen sich auch alle gegebene Pyramiden in Prismen oder umgekehrt gegebene Prismen in Pyramiden von gleichem Raume verwandeln.

VII. Jeder Kegel kann als der dritte Theil eines Cylinders betrachtet werden, welcher mit ihm einerlei Grundfläche und Höhe hat.

Denn jeder Cylinder ist einem Prisma, jeder Kegel aber einer Pyramide von unzählig vielen Ecken gleich. Da nun jede Pyramide der dritte Theil eines Prismas von der nämlichen Grundfläche und Höhe ist, so muß auch der Kegel ein Drittheil jenes Cylinders seyn, welcher mit ihm Grundfläche und Höhe gemein hat.

Es müssen daher alle Raumverhältnisse, welche von den Pyramiden bewiesen wurden, nunmehr ebenso von den Kegeln gelten. Daher müssen zwei Kegel von gleichen Grundflächen sich wie die Höhen, von

gleichen Höhen sich wie die Grundflächen, und von verschiedenen Grundflächen und Höhen sich wie die Producte aus jenen in diese verhalten.

Es werden demnach zwei Kegel gleich am Inhalte seyn, wenn die Grundfläche des einen n mal größer, als jene des andern; die Höhe des zweiten aber n mal größer, als jene des ersten ist, oder auch umgekehrt.

VIII. Soll man daher zwei Kegel von verschiedenen Grundflächen und gleichen Höhen in einen einzigen von der nämlichen Höhe verwandeln, so construire man einen Kreis, welcher jenen beiden Grundflächen zusammengenommen gleich ist und über ihn einen Kegel von der nämlichen Höhe.

Ganz auf ähnliche Art wird ein Kegel gefunden, welcher das nfache oder der nte Theil eines gegebenen ist, und mit ihm die Höhe gemein hat.

Auch kann sehr leicht der Unterschied zweier Kegel von einerlei Höhe in einem neuen Kegel von derselbigen Höhe dargestellt werden.

Ueberhaupt ist es leicht, durch Anwendung der bisherigen Sätze irgend einen gegebenen eckig prismatischen, cylindrischen, pyramidalischen oder kegelförmigen Körper in irgend einen andern dieser Art von bestimmter Höhe oder Grundfläche zu verwandeln oder auch in einen solchen, der, bei verschiedener Höhe und Grundfläche, dennoch mit ihm gleichen Körperraum hat.

Der ganz allgemeine, als Resultat aus dem Vorhergehenden hervorgehende Lehrsatz heißt daher: Alle (sowohl eckige, als runde) prismatische, sowie

auch alle (eckige und runde) pyramidalische Körper stehen nach ihrem körperlichen Inhalte im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen.

IX. Wenn man einen Kegel parallel mit der Grundfläche schneidet, so ist die Durchschnittsebene ein Kreis.

Es werde der schiefe Kegel apm (Fig. 72.) von einer Ebene durch h mit der Grundfläche pm parallel geschnitten, so ist hdgn ein Kreis.

Wenn man in der Grundfläche den Durchmesser pm und durch ihn das Achsendreieck apm construirt, so entsteht in der Durchschnittsebene die Linie hg, welche mit pm gleichlaufend ist. Daher sind auch die Dreiecke ach und aop, ferner acg und aom einander ähnlich. Folglich wird ac : ch = ao : op und ac : cg = ao : om. Daher ist ch : op = cg : om, oder ch : cg = op : om = 1 : 1, d. h. ch = cg. Schnitte man den Kegel nach dem Achsendreiecke afq, so würde auf ähnliche Art bewiesen, daß cd = cn sei.

Daher ist die Figur hdgn eine solche, in welcher ein Punct c von jedem Puncte des Umfangs gleiche Entfernung hat, d. h. sie muß ein Kreis seyn.

Je näher der Durchschnitt bei der Spitze des Kegels geschieht, desto kleiner ist der hieraus entstehende Kreis. Denn um so kleiner ac gegen ao ist, um so kleiner muß auch ch gegen op seyn.

Daß aus einem mit der Grundfläche nicht parallelen Schnitte kein Kreis entstehen kann, läßt sich ebenfalls hieraus leicht nachweisen.

X. Wenn man einen senkrechten oder schiefen Cylinder parallel mit der Grundfläche schneidet, so ist die Durchschnittsfigur ebenfalls ein Kreis.

Es werde der senkrechte Cylinder bahg (Fig. 73.) von einer durch w gehenden, mit der Grundfläche parallellaufenden Ebene geschnitten, so ist wrvp ein Kreis.

Wenn cd die Achse des Cylinders ist, so lege man durch sie und durch den willkührlich gezogenen Durchmesser nm eine Ebene nmqo, welche die Ebene wv in rp und die Grundfläche gh in oq schneidet. Da nm mit oq gleichlaufend und ihr gleich ist, so muß nmqo ein Rechteck seyn, und da rp sowohl mit nm als mit oq gleichlaufend ist, so muß auch nmpr und rpqo ein solches Rechteck seyn. Daher ist rp = nm = oq.

Da nun eben dieses von allen andern Durchschnittslinien in wv bewiesen wird, so ist wrvp eine Figur, in welcher alle Durchmesser einander gleich sind, d. h. ein Kreis.

Würde der Cylinder nicht mit der Grundfläche gleichlaufend, sondern auf irgend eine Weise schief geschnitten, so entstände, wie leicht zu beweisen ist, kein Kreis, sondern eine andere krummlinige Figur (Ellipse.)

§. 2.

Die Kugel.

I. Wenn man eine Kugel mit einer Ebene irgendwo durchschneidet, so bildet die Durchschnittsfigur ebenfalls einen Kreis.

Es stelle paqg (Fig. 74.) eine Kugel, c ihren Mittelpunct und abgmn eine schneidende Ebene vor, so wird dieselbe einen Kreis bilden.

Man ziehe vom Mittelpuncte c auf die Durchschnittsebene ag das Loth cd und verlängere dasselbe beiderseits bis zur Kugelfläche nach q und p. Zieht man nun von d in der Ebene des Durchschnitts zwei willkührliche Linien dm und dn bis zur Kugelfläche, und verbindet ihre Endpuncte durch zwei aus c gezogene Linien cn und cm, so entstehen zwei rechtwinkelige Dreiecke cdn und cdm, welche die Hypotenusen cn und cm, als Halbmesser der Kugel, und die Cathete cd mit einander gemein haben. Daher muß auch, nach dem pythagoräischen Lehrsatze, dn = dm seyn.

Da nun die Linien dn und dm willkührlich gezogen waren und in der Durchschnittsfigur abgn einander immer gleich seyn müssen, so ist diese Figur ein Kreis, dessen Radius = dn ist.

II. Wenn der Durchschnitt näher bei dem Mittelpuncte der Kugel liegt, so ist in dem rechtwinkeligen Dreiecke die Hypotenuse cn nun so groß, wie vorhin; aber die Cathete cd muß kleiner seyn. Daher ist, nach dem pythagoräischen Lehrsatze, die andere Cathete dn nunmehr größer als zuvor. Da diese aber den Radius des Durchschnittskreises bestimmt, so muß dieser Kreis hier größer seyn, als zuvor.

Läge die Durchschnittsebene in dem Mittelpuncte der Kugel selbst, so würde in dem rechtwinkeligen Dreiecke cdn die Cathete cd verschwinden und die Cathete dn dem Halbmesser der Kugel selbst gleich

seyn. Wenn also eine Kugel durch den Mittelpunct geschnitten wird, so entsteht der größte Kreis, welcher aus ihr möglich ist, d. h. jener, aus dessen Umdrehung die Kugel entstanden war.

Ganz auf ähnliche Weise erkennt man, daß die Durchschnittskreise immer kleiner werden, je weiter die schneidende Ebene vom Mittelpuncte entfernt liegt. Wäre diese Entfernung dem Halbmesser gleich, so würde kein Durchschnitt möglich seyn, und eine Ebene, welche auf dem Radius der Kugel lothrecht steht, hätte nur diesen Punct mit ihr gemein und würde das für die Kugel seyn, was die Tangente für den Kreis ist.

III. Wenn man vom Puncte p die Linien pa, pn, pm und pg, sodann aus d in der Durchschnittsebene ag die Verbindungslinien da, dn, dm und dg zieht, so entstehen die rechtwinkeligen Dreiecke pda, pdn, pdm und pdg, welche, weil sie die beiden Catheten gemein haben, einander congruent sind. Daher ist $pa = pn = pn = pg$.

Werden auf gleiche Weise vom Puncte q die Linien qa, qn, qm und qg gezogen, so sind die rechtwinkeligen Dreiecke qda, qdn, qdm und qdg aus gleichem Grunde congruent, und es ist $qa = qn = qm = qg$.

Daher haben die Puncte p und q eine solche Lage, daß jeder von ihnen von jedem in dem Durchschnittskreise willkührlich gewählten Puncte gleiche Entfernung hat. Man nennt diese Puncte die beiden Pole der Kugel, sowie pq ihre Achse.

Man überzeugt sich leicht, daß diese Pole auch von den Umfangspuncten aller andern mit ag parallelen Kreise gleichweit entfernt sind. Auch sagt man auf ähnliche Weise, daß Parallelkreise einer Kugel die nämlichen Pole haben.

IV. Um die Kugel ihrem körperlichen Inhalte nach mit den bisher betrachteten prismatischen und pyramidalischen Körpern zu vergleichen, dient folgender, zuerst von Archimedes erfundene Satz: die Halbkugel beträgt, ihrem Inhalte nach, zwei Drittheile eines Cylinders, der ihren größten Kreis zur Grundfläche und ihren Radius zur Höhe hat, dessen Beweis auf folgender Entwickelung beruht:

Es sei bma (Fig. 75.) ein Halbkreis, aus b, c und a seien die Lothe bd = cm = ag errichtet, dann die Verbindungslinien bd, dg, ga, cd und cg gezogen, so ist cmoa ein Quadrant, cmga ein Quadrat und cmg ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck, welche Figuren sämmtlich die Linie mc gemein haben.

Denkt man nun, diese drei Figuren werden um die gemeinschaftliche Linie mc, als feste Achse, einmal ganz und gar herumbewegt, so beschreibt der Quadrant eine Halbkugel, das Quadrat einen senkrechten Cylinder und das rechtwinkelige Dreieck einen senkrechten Kegel, und es ist klar, daß diese drei Körper die Höhe mc gemein haben.

Nun nehme man an, daß eine mit ba gleichlaufende Ebene qf diese drei Körper durchschneidet, so ist jeder dieser drei Durchschnitte ein Kreis, und es hat der Durchschnittskreis im Cylinder die Linie nf, jener

in der Halbkugel die no und der in dem Kegel die Linie nh zum Radius.

Wird nun co gezogen, so ist das Quadrat über co so groß, als jenes über no und jenes über nc zusammengenommen. Da aber co = ca = nf, und nh = nc ist, so wird auch das Quadrat über nf so groß seyn, als das Quadrat über no und jenes über nh zusammen sind. Weil sich aber die Kreisflächen wie die Quadrate ihrer Halbmesser verhalten, so ist die Kreisfläche um nf so groß, als die Kreisfläche um no und jene um nh zusammengenommen sind, d. h. die Durchschnittsfläche im großen Cylinder ist den beiden Durchschnittskreisen zusammen gleich, welche in der Halbkugel und im Kegel entstehen.

Denkt man sich nun eine zweite Durchschnitts-ebene, mit qf gleichlaufend und sehr nahe bei ihr, so liegen zwischen beiden drei Cylinder von einerlei Höhe, deren einer einen Theil des großen Cylinders, der zweite einen Theil der Halbkugel und der dritte einen Theil des Kegels bildet.

Da diese kleinen Cylinder, weil sie einerlei Höhe haben, sich wie ihre Grundflächen verhalten, so ist der im großen Cylinder entstehende so groß, als der in der Halbkugel und im Kegel zusammengenommen sind.

Nun gilt aber dieses Verhältniß auch für jede drei andere zwischen zwei Durchschnittsebenen enthaltene zuerst genannte Körper; und da sie alle einerlei Höhe mc haben, so kann jeder durch ebensoviele kleine Cylinder ausgefüllt werden, als der andere. Folglich ist der durch die Umdrehung von mcag entstehende

Cylinder so groß, als die Halbkugel und der Kegel zusammengenommen Aber der Kegel ist ein Drittheil jenes Cylinders; folglich muß die Halbkugel zwei Drittheile davon seyn.

Diesen Beweis hielt man für so wichtig, daß die ihm entsprechende Zeichnung, als ruhmvolles Denkmal, dem Erfinder auf das Grab gesetzt worden ist.

V. Es muß demnach auch die ganze Kugel zwei Drittheile eines Cylinders betragen, dessen Grundfläche ihr größter Kreis und dessen Höhe ihr Durchmesser ist.

Daher verhalten sich auch mehrere Kugeln gegen einander, wie die Producte aus den Grundflächen ihrer größten Kreise in ihre Durchmesser. Da aber jene Kreisflächen wieder im Verhältnisse der Quadrate ihrer Durchmesser stehen, so werden sich die Kugeln wie die Cubikzahlen aus ihren Durchmessern verhalten. Wenn z. B. die Durchmesser dreier Kugeln sich wie 1:2:3 verhalten, so verhalten sich ihre körperlichen Räume wie 1:8:27.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Was entsteht, wenn eine dreieckige Pyramide durch eine Ebene mit ihrer Grundfläche parallel geschnitten wird? Beweis dieses Satzes? Beweis dieses Satzes bei vieleckigen Pyramiden? Wann sind dreieckige Pyramiden von verschiedener Gestalt gleich am körperlichen Raume? Wie läßt sich jedes dreieckige Prisma in drei dreieckige Pyramiden theilen? Warum sind dieselbe unter sich einander gleich? Auf wievielfache Art kann jene Theilung geschehen? Angabe und

Entwickelung der verschiedenen Fälle, welche bei dreieckigen Pyramiden in Hinsicht ihrer Größe Statt finden können? Wie werden vieleckige Pyramiden in dreieckige getheilt? Wann sind solche vieleckige Pyramiden gleich am Inhalte? Welche Größenverhältnisse treten bei denselben ein? Beweise hierüber? Verwandlungen gegebener Pyramiden in andere von verschiedener Grundfläche oder Höhe; oder auch von anderer Eckenzahl? Wie werden Prismen in Pyramiden und umgekehrt diese in jene verwandelt? Wie verhält sich der Kegel zum Cylinder von gleicher Grundfläche und Höhe? Wann sind zwei Kegel gleich am körperlichen Inhalte? Wie verhalten sie sich bei gleichen Höhen, bei gleichen Grundflächen, bei verschiedenen Höhen und Grundflächen? Wann sind sie im letztern Falle gleich groß? Wie kann die Summe oder Differenz zweier Kegel durch einen Kegel dargestellt werden? Wie kann derselbe n mal größer oder n mal kleiner werden? Wie werden alle bisher betrachteten prismatische und pyramidalische Körper in andere dieser Art verwandelt? Was entsteht, wenn ein Kegel oder Cylinder mit der Grundfläche gleichlaufend geschnitten wird? Beweis hierüber? Was entsteht aus dem schiefen Schnitte? (§. 1.)

II. Was entsteht, wenn eine Kugel von einer Ebene geschnitten wird? Beweis hierüber? Wann wird dieser Kreis größer oder kleiner und warum? Was sind die Pole der Kugel und welche Eigenschaften haben sie? Was ist die Achse? Warum haben Parallelkreise einerlei Pole? Welcher Hülfssatz dienet zur Vergleichung des Inhalts der Kugel? Entwickelung desselben? Welchem Cylinder ist die Kugel gleich; welchem Kegel, welcher Pyramide? Warum verhalten sich die Kugeln wie die Cubikzahlen ihrer Durchmesser? — Warum verhalten sie sich wie die stereometrischen Würfel, welche man über diese Durchmesser als Seitenlinien construiren kann? (§. 2.)

III. Lehrübung.

Raumverhältnisse aus der Aehnlichkeit der Körper.

§. 1.

Aehnliche pyramidalische Körper.

I. Der in der Anschauungslehre gegebene Begriff von ähnlichen Körpern wird am einfachsten, an der dreieckigen Pyramide zuerst nachgewiesen.

Es sei dnmg (Fig. 76.) eine dreieckige Pyramide, b ein in der Seitenkante dn willkührlich gewählter Punct und bpc eine mit der Grundfläche nmg parallele Durchschnittsebene, so läßt sich leicht beweisen, daß die kleine Pyramide dbpc der größern dnmg ähnlich ist.

Da die Ebene bpc mit nmg gleichlaufend ist, so muß auch bp mit nm, pc mit mg und bc mit ng parallel seyn. Folglich sind die Dreiecke bpc und nmg, dbp und dnm, dpc und dmg, dbc und dng einander ähnlich; so, daß die zwei Pyramiden in gleichviele, einander ähnliche Seitenflächen eingeschlossen sind.

Auch folgt hieraus die gegenseitige Proportionalität aller homologen Seitenkanten.

Den Körperwinkel bei d haben beide gemein; daß aber die Körperwinkel bei b, p und c den ihnen homologen bei n, m und g congruent sind, folgt leicht aus dem Bisherigen, sowie auch, daß die Seitenkanten und Seitenflächen in beiden dieselbige Neigung haben.

Daher sind die beiden Pyramiden nur der Größe nach von einander verschieden; in allem andern aber vollkommen mit einander übereinstimmend und entsprechen daher jenem Begriffe, welcher oben von ähnlichen Körpern gegeben wurde.

II. Ganz auf ähnliche Art wird bewiesen, daß bei einer viereckigen Pyramide ebenfalls eine kleinere, der ganzen ähnliche entsteht, wenn letztere parallel mit der Grundfläche geschnitten wird. Ueberhaupt geht hieraus hervor, daß dieser Beweis auf jede andere vieleckige Pyramide angewendet werden kann.

Um also eine Pyramide zu bilden, welche einer gegebenen ähnlich und kleiner als dieselbe ist, darf sie nur von einer Ebene mit der Grundfläche parallel durchschnitten werden. Sollte aber die zu construirende größer als die gegebene seyn, so dürfte man nur ihre Seitenkanten über die Grundfläche verlängern, bis sie von irgend einer Parallelebene mit ihr geschnitten würden.

III. Wenn dreieckige Pyramiden einander ähnlich sind, so verhalten sie sich ihrem Raume nach wie die Würfelzahlen von irgend zwei ihrer homologen Seiten.

Es seien (Fig. 76.) die Pyramiden dbpc und dnmg einander ähnlich, und du sei ein Loth von der Spitze auf die Grundfläche der größern, so muß dasselbe die kleinere Grundfläche bpc in einem Puncte q schneiden, welcher eine ähnliche Lage gegen sie hat; so, daß, wenn man die Linien nu und bq zieht, auch die Dreiecke dnu und dbq einander ähnlich sind.

Nun verhält sich die kleinere Pyramide zur größern, wie das Product aus bpc in dq zum Producte

aus nmg in du. Da aber die Dreiecke bpc und nmg ähnlich sind, so verhalten sie sich wie die Quadratzahlen von bq und nu, und die kleinere Pyramide muß sich auch zur größern verhalten wie das Product aus der Quadratzahl von bq in dq zum Producte aus der Quadratzahl von nu in du. Da sich aber die Linien bq und nu wie dq und du verhalten, so muß auch die kleine Pyramide sich so zur größeren verhalten, wie sich die Würfelzahl von dq zur Würfelzahl von du verhält.

Wäre z. B. db $= \frac{1}{2}$ dn, so würde die kleinere Pyramide der achte Theil von der größeren seyn, und überhaupt, wenn db von dn der mte Theil wäre, so würde die kleinere Pyramide der $\frac{1}{m^3}$ Theil der größeren seyn.

Auch werden sich ähnliche vieleckige Pyramiden wie die Würfelzahlen aus den Maßen ihrer ähnlich liegenden Linien verhalten. Denn diese Pyramiden können durch die gehörig gezogenen Diagonalflächen in ähnliche dreieckige zertheilt werden. Da aber diese dreieckigen Pyramiden in dem bemerkten Verhältnisse stehen, so müssen sich auch ihre Summen, d. h. die vieleckigen Pyramiden auf gleiche Weise verhalten.

Verhielten sich die homologen Seitenkanten zweier ähnlichen vieleckigen Pyramiden wie 1 : 2, so würden alle übrigen Seitenkanten in eben diesem Verhältnisse seyn. Das Verhältniß ihrer homologen Seitenflächen und somit auch ihrer gesammten Umfangsflächen wäre wie 1 : 4; das Verhältniß ihrer körperlichen Inhalte aber wie 1 : 8.

IV. Da alle Kegel als pyramidalische Körper zu betrachten sind, so entsteht aus dem parallelen Durchschnitte eines gegebenen Kegels ebenfalls ein kleinerer Kegel, welcher dem ganzen ähnlich ist; und es kömmt nicht darauf an, ob der gegebene Kegel ein senkrechter oder ein schiefer ist, wenn nur die Durchschnittsfläche mit seiner Grundfläche parallel läuft.

Auch folgt hieraus, daß sich ähnliche Kegel wie die Würfelzahlen ihrer ähnlichen Linien verhalten und daß z. B. ein Kegel, dessen Durchmesser = 1 der achte Theil eines andern ihm ähnlichen ist, der den doppelten Durchmesser hat.

Um einen Kegel zu construiren, der einem gegebenen ähnlich, aber größer, als derselbe ist, darf man nur das Achsendreieck des gegebenen verlängern, mit dessen Grundlinie irgendwo eine Parallele ziehen, um diese einen Kreis beschreiben, und eine der verlängerten Dreiecksseiten einmal rings um ihn herführen.

§. 2.

Aehnliche prismatische Körper.

I. Die Entstehung der ähnlichen prismatischen Körper läßt sich am einfachsten an dem dreieckigen Prisma nachweisen.

Es sei (Fig. 77.) dcbmnp ein dreieckiges Prisma. Man mache da = $\frac{1}{2}$ db, dq = $\frac{1}{2}$ dc und ziehe qa so sind die Dreiecke dqa und dcb einander ähnlich. Nimmt man nun auch df = $\frac{1}{2}$ dm, zieht fh mit db und ah mit dm gleichlaufend, so sind dahf und dbpm

einander ähnlich. Wird ferner qg mit dm und fg mit dc parallel gezogen, so sind auch dqgf und dcnm ähnliche Vierecke, sowie nun auch das Viereck aqgh dem Vierecke bcnp ähnlich ist.

Das hierdurch entstandene dreieckige Prisma dqafgh ist dem gegebenen dcbmnp ähnlich. Denn man erkennt leicht, daß alle Seitenflächen des ersten den homologen Seitenflächen des zweiten ähnlich, auch alle Körperwinkel des einen den ähnlichliegenden im andern gleich sind, sowie die Seitenflächen sowohl unter sich, als gegen die Grundflächen einerlei Neigung haben. Daher ist das kleine Prisma vom größeren durch nichts anderes, als durch die Größe verschieden, und muß ihm daher, dem Begriffe nach, ähnlich seyn. Man sieht, daß das kleine Prisma dadurch gebildet wurde, daß seine drei aus dem Puncte d nach Länge, Breite und Tiefe ausgehende Linien da, dq und df in demselbigen Verhältnisse stehen, worin sich die homologen Linien db, dc und dm befinden.

Sollte ein Prisma gebildet werden, welches dem gegebenen ähnlich, aber größer, als dasselbe wäre, so dürfte man nur die drei Seitenkanten db, dc und dm nach demselbigen Verhältnisse verlängern, um den neuen Körper zu erhalten.

Auch erkennt man hieraus, auf welche Weise vieleckige ähnliche Prismen entstehen, und es ist leicht, solche Körper durch Zeichnungen darzustellen.

II. Auch müssen sich ähnliche prismatische Körper wie die Würfelzahlen ihrer homologen Linien verhalten. Denn man kann jedes dieser Prismen in gleich viele, unter sich ähnliche dreieckige Pyramiden

theilen. Da sich nun ähnliche dreieckige Pyramiden wie die Würfelzahlen ihrer homologen Linien verhalten, so muß dieses Verhältniß auch von den Summen dieser ähnlichen Bestandtheile, d. h. von den ähnlichen Körpern selbst gelten.

Wenn daher die homologen Linien dreier ähnlichen Prismen sich wie 1 : 3 : 5 verhielten, so würden ihre Inhalte in dem Verhältnisse von 1 : 27 : 125 stehen.

III. Ganz auf ähnliche Art können auch ähnliche Cylinder construirt werden. Wenn man einen gegebenen Cylinder nach seiner Achse durchschneidet und den Durchmesser seiner Grundfläche, sowie seine Seite, nach dem Verhältnisse dieser beiden Linien verlängert oder verkürzt und zu diesen neuen Linien den entsprechenden Cylinder bildet, so muß derselbe dem gegebenen ähnlich seyn. Es ist leicht, diese Verhältnisse durch Zeichnungen zu erläutern, der gegebene Cylinder mag ein senkrechter oder ein schiefer seyn.

IV. Aehnliche Cylinder müssen sich daher ebenfalls wie die Würfelzahlen ihrer homologen Linien verhalten.

Denn jeder Cylinder stellt das Dreifache des ihm angehörigen Kegels dar; was daher von ähnlichen Kegeln gilt, muß auch von ähnlichen Cylindern gelten.

Ueberhaupt folgt hieraus der allgemeine Satz: die körperlichen Räume aller ähnlichen pyramidalischen und prismatischen Körper stehen im geraden Verhältnisse der Würfelzahlen ihrer homologen Linien.

Daher sind die Verhältnisse dieser Körperräume bestimmt, wenn die Zahlenverhältnisse ihrer homologen Seiten angegeben sind.

§. 3.

Aehnlichkeit der Kugeln.

I. Daß alle Kugeln einander ähnlich sind, kann man schon aus ihrer Entstehung erkennen, weil sie aus ähnlichen Figuren auf ähnliche Weise hervorgebracht werden. Inzwischen ist diese Begründung nicht überzeugend genug für die Wissenschaft.

II. Der Körperraum jeder Kugel ist jenem einer Pyramide gleich, deren Grundfläche die Kugelfläche und deren Höhe der Radius ist. Denn wenn man sich auf der Oberfläche einer Kugel ein sehr kleines Quadrat und von ihrem Mittelpuncte nach jedem Scheitel desselben eine gerade Linie vorstellt, so entsteht hierdurch eine kleine vierseitige Pyramide, deren Grundfläche jenes kleine Quadrat und deren Höhe der Halbmesser der Kugel ist.

Stellt man sich nun die ganze Kugelfläche in eine große Menge solcher kleinen, unter sich gleichen Quadrate eingetheilt vor und zieht aus ihrem Mittelpuncte alle Seitenkanten, so kann der Inhalt der Kugel als die Summe von allen diesen, unter sich gleichen Pyramiden betrachtet werden. Da aber dieselben sowohl Grundfläche als Höhe gemein haben, so ist ihre Summe einer einzigen Pyramide gleich, deren Grundfläche der Summe ihrer Grundflächen (d. h. hier der Kugelfläche) und deren Höhe ihren

Höhen (d. h. dem Radius der Kugel) gleich ist. Daher muß jede Kugel einer Pyramide gleich seyn, deren Grundfläche die Kugelfläche und deren Höhe der Radius ist.

III. Denkt man sich zwei Kugeln von verschiedenen Durchmessern mit ihrem Mittelpuncte zusammenfallend, auf der Oberfläche der kleinern eine sehr kleine quadratische Fläche, von ihrem Mittelpuncte nach jedem Scheitel derselben einen Radius, und verlängert dieselben bis zur Oberfläche der größern, so entsteht auf dieser ebenfalls ein kleines Quadrat, und die kleine viereckige Pyramide im Innern der kleinen Kugel muß jener in der größern Kugel ähnlich seyn. Daher verhalten sich beide Pyramiden zu einander wie die Würfelzahlen der Radien dieser Kugeln.

Da aber jede Kugel als die Summe gleich vieler solcher ähnlichen Pyramiden zu betrachten ist, so müssen auch die Kugeln selbst wie die Würfelzahlen ihrer Halbmesser oder auch wie die Würfelzahlen ihrer Durchmesser sich verhalten. Wäre z. B. der Durchmesser einer Kugel zehnmal so groß, als jener einer andern, so würde ihr Inhalt tausendmal so groß, als der andere seyn.

Auch kann dieser Beweis daraus hergeleitet werden, daß jede Kugel zwei Drittheile eines Cylinders beträgt, dessen Grundfläche ihrem größten Kreise und dessen Höhe ihrem Durchmesser gleich ist. Denn diese Cylinder sind einander ähnlich und verhalten sich folglich wie die Würfel aus den Durchmessern ihrer Grundflächen.

IV. Hieraus gehen folgende Verhältnisse hervor, welche dazu dienen, die Natur der Linien, Flächen und Körper genauer kennen zu lernen.

Die Peripherien der größten Kreise zweier Kugeln stehen im geraden Verhältnisse ihrer Durchmesser.

Die Oberflächen zweier Kugeln (als die Grundflächen zweier ähnlichen Pyramiden) stehen im geraden Verhältnisse der Quadratzahlen ihrer Durchmesser.

Die Körperräume der Kugeln stehen im Verhältnisse der Würfelzahlen ihrer Durchmesser.

§. 4.

Uebungs-Fragen.

I. Wie muß eine gegebene dreieckige Pyramide geschnitten werden, daß eine kleinere, ihr ähnliche entsteht? Begründung dieses Begriffs der Aehnlichkeit? Eben dieses für viereckige und vieleckige Pyramiden? Wie wird eine Pyramide construirt, welche einer gegebenen ähnlich und größer als dieselbe ist? Wie verhalten sich ähnliche dreieckige Pyramiden zu einander? Beweis dieses Satzes? Anwendungen desselben? Wie verhalten sich ähnliche vieleckige Pyramiden zusammen? Wie entstehen ähnliche Kegel? Begründung dieses Begriffs? Einen Kegel zu bilden, welcher einem gegebenen ähnlich und größer als derselbe ist? (§. 1.)

II. Wie entstehen ähnliche dreieckige Prismen? Wissenschaftliche Begründung dieses Begriffs? Wie entstehen vieleckige ähnliche Prismen? Construction ähnlicher eckigen Prismen, welche kleiner oder größer als gegebene sind? Wie verhalten sich die Körperräume ähnlicher eckigen Prismen zusammen? Wie entstehen ähnliche Cylinder? Beweis ihrer Aehn-

lichkeit? Construction größerer oder kleinerer Cylinder, welche gegebenen ähnlich sind? Wie verhalten sich die Körperräume ähnlicher Cylinder zu einander? — In welchem Verhältnisse stehen ähnliche, pyramidalische und prismatische Körper überhaupt? (§. 2.)

III. Was versteht man unter der Aehnlichkeit der Kugeln? Wie läßt sich dieselbe auf mancherlei Art nachweisen? Wie verhalten sich Kugeln von verschiedenen Durchmessern in Bezug auf ihren Inhalt? Folgerungen hieraus? Wie verhalten sich die Peripherien ihrer größten Kreise, wie ihre Oberflächen und wie ihre Körperräume? (§. 3.)

Siebenter Lehrgang.

Wissenschaftliche Berechnungen des Inhaltes und der Oberflächen der Körper.

I. Lehrübung.

Allgemeine Vordersätze und Berechnung des Inhaltes.

§. 1.

Entwickelung einiger Vordersätze.

I. Da jedes Messen ein bestimmtes Maß voraussetzt, welches als die zum Grunde liegende Einheit zu betrachten ist, so sind auch die stereometrischen Messungen nur durch Festsetzung einer solchen Einheit möglich.

Da nun, nach einem bekannten Grundsatze, das Maß und die zu messende Größe unter sich gleichartig seyn müssen, so kann der körperliche Inhalt

nur durch Annahme eines körperlichen Maßes bestimmt werden.

Sowie nun der Linienfuß als Maß der Linien, der Quadratfuß als Maß der Flächen dient, so wird der Cubikfuß, d. h. ein Würfel, welcher einen Schuh lang, breit und hoch ist, das einfachste Maß für die Körper seyn.

II. Einen gegebenen Körper ausmessen, d. h. seinen körperlichen Inhalt bestimmen, heißt daher nichts anderes, als angeben, wie oft der zur Einheit angenommene Cubikfuß in seinem Raume enthalten ist.

Denkt man sich einen Würfel, dessen Seite einen Zoll oder eine Linie beträgt, so heißt derselbe Cubikzoll oder Cubiklinie, sowie ein Würfel, dessen Seite einer Ruthe gleich ist, eine Cubikruthe genennt wird. Auf gleiche Weise kann man sich auch eine Cubikmeile vorstellen.

III. Sowie sowohl bei der Linien- als Flächenmessung die Verschiedenheit des zehntheiligen und zwöltheiligen Maßes eintritt, so hat auch eben diese verschiedene Eintheilung bei dem körperlichen Messen statt. Wenn man den Schuh in zwölf gleiche Theile theilt und den zwölften Theil desselben als Seite eines Würfels betrachtet, so wird derselbe ein zwölftheiliger oder ein Duodecimal-Cubikzoll genennt. Theilt man ihn aber in zehn gleiche Theile und construirt über diesen zehnten Theil einen Würfel, so heißt dieser ein zehntheiliger oder Decimal-Cubikzoll. Auf gleiche Weise ist klar, was man unter einer Decimal oder Duodecimal Cubiklinie u. s. f. zu verstehen habe.

IV. Wenn man der zehntheiligen Abtheilung folgt, so wird der Cubikfuß aus 1000 Cubikzollen und der Cubikzoll aus 1000 Cubiklinien bestehen.

Um sich hiervon zu überzeugen, sei cb (Fig. 78.) der über die Linie ch als Fußlänge beschriebene Cubikfuß und cg, als zehnter Theil desselben, der Zoll, worüber der Decimal Cubikzoll cn beschrieben ist. Da hier $cg = \frac{1}{10}$ ch, so kann der Cubikzoll cn zehnmal von c nach h neben einander und ebenso auch zehnmal von c nach v gestellt werden. Daher kann derselbe auf die Grundfläche cvah gerade 100mal gesetzt werden. Da aber auch $cm = \frac{1}{10}$ cd ist, so kann dieser Cubikzoll auch 10mal über einander gestellt werden und der Cubikfuß wird 10 Schichten enthalten, in deren jeder sich 100 Cubikzolle befinden; d. h. ein Cubikfuß muß 1000 Cubikzolle enthalten.

Auf ähnliche Art besteht auch der zehntheilige Cubikzoll wiederum aus 1000 Cubiklinien; so, daß 1000 die Reductionszahl für diese Eintheilung ist. Man bemerke, daß $38^{c'}\ 23^{c''}\ 15^{c'''}$ soviel heißt, als 38 Cubikfuß, 23 Cubikzoll und 15 Cubiklinien. Ferner heißt z. B. 8^{co} soviel als 8 Cubikruthen.

V. Um daher eine gegebene Menge von Cubikfußen in decimal Cubikzolle zu verwandeln, darf man ihre Zahl nur mit 1000 multipliciren; sowie auch auf gleiche Weise Cubikzolle in Cubiklinien verwandelt werden.

Beispiele. So sind z. B. $24^{c'} = 24000^{c''} = 24000000^{c'''}$; ferner sind $345^{c'} = 345000^{c''} = 345000000^{c'''}$. Wird die Längenruthe in zehn Längenfuße getheilt, so ist die Reduction eine ähnliche. Es

sind z. B. $12^{co} = 12000^{c'} = 12000000^{c''} = 12000000000^{c'''}$. Man sieht hieraus zur Genüge, wie höchst einfach solche Verwandlungen sind.

VI. Soll man aber umgekehrt Cubiklinien in Cubikzolle oder Cubikzolle in Cubikfuße nach dieser zehntheiligen Abtheilung verwandeln, so müssen die gegebenen Zahlen mit 1000 dividirt werden. Da dieses sehr bequem geschehen kann, so geht hieraus auch die Einfachheit dieser Reduction hervor.

Beispiele. Es sind $52000^{c'''} = 52^{c''}$; $36000^{c''} = 36^{c'}$; $318000^{c'} = 318^{co}$. Ferner ist $12000000000^{c'''} = 12000000^{c''} = 12000^{c'} = 12^{co}$. Endlich sind $38297458342^{c'''} = 38297458^{c''}\ 342^{c'''} = 38297^{c'}\ 458^{c''}\ 342^{c'''} = 38^{co}\ 297^{c'}\ 458^{c''}\ 342^{c'''}$.

VII. Bedient man sich aber des zwölftheiligen Maßes, so ist leicht einzusehen, daß ein Cubikschuh aus $12 \times 12 \times 12$ d. h. aus 1728 Cubikzollen, sowie auch ein Cubikzoll aus 1728 Cubiklinien bestehe.

Soll daher eine gegebene Menge von Cubikfußen in Cubikzolle verwandelt werden, so muß man dieselben mit dieser Reductionszahl multipliciren; sowie umgekehrt die niederen Maße, bei ihrer Verwandlung in die zunächst höheren mit 1728 dividirt werden müssen.

Da sowohl jene Multiplication, als diese Division hier weit beschwerlicher, als vorhin ist, so sind auch diese Reductionen nicht so einfach, als jene.

Beispiele. Es sind hier $18^{c'} = 18 \times 1728 = 31104^{c''} = 31104 \times 1728 = 53747712^{c'''}$. Auch ist z. B. $1^{c'} = 1728^{c''} = 1728 \times 1728 = 2985984^{c'''}$.

Umgekehrt sind $834764^{c'''} = \frac{834764}{1728} = 483^{c''}\ 140^{c'''}$ u. s. w.

VIII. Nennt man den zehntheiligen Cubikzoll C, den zwölftheiligen c, so ist,

$$1728\ c = 1000\ C, \text{ folglich}$$
$$1{,}728\ c = C \text{ und daher}$$
$$\frac{1000}{1728}\ C = c = 0,\ 5787\ldots C$$

Soll man daher eine gegebene Menge von zehntheiligen Cubikzollen in zwölftheilige verwandeln, so muß diese Zahl mit 1,728 multiplicirt; sollte aber irgend eine Menge von zwölftheiligen Cubikzollen in zehntheilige verwandelt werden, so muß ihre Zahl mit 0,5787 multiplicirt werden.

Beispiele. a) Wieviele C sind 384 c? Hier ist $384\ c = 384 \times 0{,}5787 = 222{,}2208\ C$.

b) Wieviele c sind 246 C? Hier wird $246\ C = 246 \times 1{,}728\ c = 425{,}088\ c$ u. s. f.

§. 2.

Berechnung des Inhaltes prismatischer und pyramidalischer Körper und der Kugel.

I. Die einfachste Aufgabe, welche hier statt finden kann, ist diese: den Inhalt eines senkrechten Parallelopipedums zu finden, dessen Grundfläche ein Rechteck ist.

Man messe die Grundlinie und Höhe der Grundfläche, sowie auch die Höhe des Körpers mit dem nämlichen Maße, z. B. mit dem Linienfuße, multi-

plicire die sich hieraus ergebenden drei Zahlen miteinander, so zeigt das Product die Menge der Cubikfuße an, welche der Körper enthält.

Wenn z. B. die Grundlinie der Grundfläche 5, ihre Höhe 3 Fuße beträgt, so finden auf der ganzen Grundfläche $5 \times 3 = 15$ Cubikfuße Raum. Da aber die Höhe z. B. 10 Fuß beträgt, so besteht der ganze Körper aus 10 Schichten, in deren jeder 15 Cubikfuße stehen. Daher muß das ganze Parallelopipedum $5 \times 3 \times 10 = 150$ Cubikfuße enthalten.

Wäre die Grundfläche ein schiefes Parallelogramm, so müßte man seine Grundlinie und senkrechte Höhe messen, diese Maße mit einander multipliciren, und ferner verfahren, wie vorhin. Denn man mißt hier einen Körper aus, welcher dem gegebenen zwar nicht congruent, aber doch vollkommen gleich am Inhalte ist.

Wenn die drei zu messenden Linien nicht genau mit dem Fußmaße ausgemessen werden können, so müssen noch die Zolle oder Linien bestimmt werden, welche nebst den Fußen darin enthalten sind. Es sei z. B.

die Grundlinie der Grundfläche $= 8' \; 5''$

die Höhe der Grundfläche $= 3' \; 4''$

die senkrechte Höhe des Körpers $= 12' \; 2''$,

so ist sein Inhalt $= 85 \times 34 \times 122 = 2890 \times 122 = 352580^{c''} = 352^{c'} \; 580^{c''}$, woraus wieder der Vortheil der Decimaleintheilung hervorgeht.

II. Bisweilen sagt man, der Inhalt eines senkrechten Parallelopipedums werde gefunden, **wenn man seine Grundfläche mit der Höhe multiplicirt.** Dieser Ausdruck ist nicht vollkommen richtig,

da eine Fläche eigentlich nicht mit einer Linie multiplicirt werden kann. Daher sagt man richtiger: der Inhalt eines solchen Körpers werde durch ein Product aus dem Maße seiner Grundfläche in das Maß seiner Höhe bestimmt.

Wäre die Grundfläche des senkrechten Parallelopipedums ein Quadrat, dessen Seite = a ist, und wäre dessen Höhe = h, so stellte das Product $a^2 h$ den Inhalt desselben dar.

Wäre aber der gegebene Körper ein Würfel, dessen Seite ebenfalls dem Maße nach = a ist, so würde sein Inhalt $= a \times a \times a = a^3$ seyn.

Hierin liegt der Grund der Benennung von den Cubikzahlen oder Würfelzahlen in der Arithmetik. Es ist z. B. 125 eine Cubikzahl, weil man sich unter 125 den Inhalt eines Würfels vorstellen kann, dessen Seite = 5 ist.

III. Um den Inhalt eines schiefen Parallelopipedums zu finden, multiplicire man das Maß seiner Grundfläche mit dem Maße seiner lothrechten Höhe, so wird das Product diesen Inhalt in solchen Cubikmaßtheilen darstellen, nach welchen man die drei Linien gemessen hat.

Man sieht nämlich, daß das schiefe Parallelopipedum nicht genau mit Cubikfußen ausgefüllt werden kann. Daher wird dasselbe in ein ihm gleiches senkrechtes verwandelt, welches mit diesen Maßtheilen vollkommen erfüllt werden kann.

Sollten die zu messenden Seiten nicht genau mit dem Fuße auszumessen seyn, so bestimme man noch die Zolle und Linien, welche sie enthalten.

Beispiele. Es sei z. B. die
Grundlinie der Grundfläche = 5′ 3″ 2‴
lothrechte Höhe derselben = 3′ 6″ 4‴
senkrechte Höhe des Körpers = 10′ 2″ 3‴,
so ist sein Inhalt = 532 × 364 × 1023 = 198101904ᶜ‴ = 198101ᶜ″ 904ᶜ‴ = 198ᶜ′ 101ᶜ″ 904ᶜ‴.

IV. Hierauf beruht auch die Bestimmung des Inhaltes der dreieckigen Prismen, da diese Körper die Hälften der ihnen angehörigen Parallelopipeden sind.

Ist das dreieckige Prisma ein lothrechtes, so multiplicire man das Maß seiner Grundfläche mit dem Maße der lothrechten Höhe. Denn wenn man das Maß seiner Höhe mit jenem seiner doppelten Grundfläche multiplicirte, so würde der Inhalt eines Parallelopipedums gefunden werden, welches noch einmal so groß, als das gegebene Prisma ist. Daher muß die Hälfte dieses Products, welches man erhält, wenn der eine Factor halbirt wird, der Inhalt des Prisma seyn.

Ist aber das dreieckige Prisma ein schiefes, so muß das Maß seiner Grundfläche mit jenem seiner senkrechten Höhe multiplicirt werden. Denn auch hier fände man durch ein Product aus dem Maße der Höhe in jenes der doppelten Grundfläche den Inhalt eines Parallelopipedums von der doppelten Größe des gegebenen Prismas.

Beispiel. Es sei die Grundfläche = 24ᑫ′ die senkrechte Höhe = 12′ 6″, so ist der Inhalt = 24 × 12′ 6″ = 2400 × 126 = 302400ᶜ″ = 302ᶜ′ 400ᶜ″.

V. Um den Inhalt eines vieleckigen, senkrechten oder schiefen, prismatischen Körpers zu finden, muß

ebenfalls das Maß seiner Grundfläche mit jenem seiner senkrechten Höhe multiplicirt werden. Denn es ist aus dem Vorhergehendtn bekannt, daß jedes n eckige Prisma durch Diagonalschnitte in $n - 2$ dreieckige Prismen, welche alle einerlei Höhe haben, zertheilt werden kann.

Beispiele. a) Es sei der Inhalt der Grundfläche eines senkrechten vieleckigen Prisma $= 46^{q'}\ 18^{q''}$, das Maß seiner Seitenkante $= 10'\ 3''$, so ist sein Inhalt $= 4618 \times 103 = 475654^{c''} = 475^{c'}\ 654^{c''}$.

b) Wäre die Grundfläche $= 32^{q'}\ 5^{q''}$ die lothrechte Höhe $= 12'$, so würde dessen Inhalt $= 3205 \times 120 = 384600^{c''} = 384^{c'}\ 600^{c''}$ seyn.

VI. Auf eben diesen Vordersätzen beruht auch die Berechnung des Inhaltes der Cylinder, welcher ebenfalls durch ein Product aus dem Inhalte der Grundflächen in ihre senkrechte Höhen bestimmt wird.

Da nämlich jeder Cylinder als ein prismatischer Körper von unzählig vielen Seiten zu betrachten ist, so wird auch sein Inhalt ganz auf ähnliche Weise gefunden.

Es sei der Halbmesser seiner Grundfläche $= r$, so ist ihr Flächeninhalt $= r^2\pi$. Wäre nun das Maß seiner senkrechten Höhe $= h$, so stellte $r^2\pi h$ seinen Körperinhalt dar.

Beispiele. a) Wäre $r = 3'$ und $h = 12'$, so würde der Inhalt des Cylinders $= 9 \times 12 \times \pi = 108 \times 3{,}1415 \ldots = 339{,}2820^{c'} = 339^{c'}\ 282^{c''}$.

b) Für $r = 1'$ und $h = 10'$ wird der Inhalt $= 1 \times 10 \times 3{,}1415 = 31{,}415^{c''} = 31^{c'}\ 415^{c''}$.

VII. Setzt man das Maß der Grundfläche irgend eines prismatischen Körpers = g und das seiner senkrechten Höhe = h, so stellt das Product $g \times h$ seinen körperlichen Inhalt dar.

Wäre der Körper ein Parallelopipedum und seine Gründfläche ein Rechteck, dessen ungleiche Seiten dem Maße nach = a und = b wären, so müßte, wenn h das Maß der lothrechten Höhe wäre, abh der Ausdruck seines Inhaltes seyn.

Wäre aber die Grundfläche ein Quadrat, dessen Seite = a, so würde a^2h sein Inhalt seyn.

Für einen Würfel, dessen Seite = a wäre, ist der Inhalt = a^3.

Für den Cylinder ist $r^2\pi h = 3{,}1415\ldots r^2h$ die allgemeine Formel zur Bestimmung seines Inhaltes.

VIII. Soll der Inhalt einer dreiseitigen Pyramide gefunden werden, so muß man das Maß ihrer Grundfläche mit jenem ihrer senkrechten Höhe multipliciren und vom Producte den dritten Theil nehmen. Denn da jede solche Pyramide der dritte Theil des ihr zugehörigen dreieckigen Prismas ist und das Product aus dem Maße der Grundfläche in jenes der Höhe den Inhalt dieses Prismas angibt, so muß der dritte Theil davon der Inhalt der Pyramide seyn.

Setzt man das Maß der Grundfläche = g, jenes der Höhe = h, so ist $\frac{g \times h}{3}$ oder $\frac{g}{3} \times h$ oder $\frac{h}{3} \times g$ die Formel für den Inhalt der Pyramiden.

Da man, wie aus der Planimetrie bekannt ist, den Inhalt eines Dreiecks unmittelbar aus seinen gemessenen drei Seiten berechnen kann, so läßt sich hier-

nach auch der Inhalt einer dreieckigen Pyramide bestimmen, ohne zuerst das Loth in ihrer Grundfläche zu ziehen.

Da man jede n eckige Pyramide durch Diagonalebenen in n—2 dreieckige zertheilen kann, so wird auch der Inhalt jeder n eckigen Pyramide gefunden, wenn man das Maß des Vielecks ihrer Grundfläche mit dem dritten Theile des Maßes ihrer Höhe multiplicirt.

Beispiele. a) Es sei die Grundfläche $= 18^{q\prime}$ die lothrechte Höhe $= 24'$, so ist der Inhalt $= \frac{18 \times 24}{3} = 18 \times 8 = 144^{c\prime}$.

b) Wäre die Grundfläche $= 12^{q\prime}\ 3^{q\prime\prime}$ die Höhe $= 5'\ 6''$, so gäbe dieses den Inhalt $= \frac{1203 \times 56}{3}$ $= 401 \times 56 = 22456^{c\prime} = 22^{c\prime}\ 456^{c\prime\prime}$.

IX. Da jeder Kegel als eine Pyramide von unzählig vielen Seiten anzusehen ist, so wird auch der Inhalt jedes Kegels gefunden, wenn man das Product aus den Maßen seiner Grundfläche und lothrechten Höhe mit 3 dividirt. Setzt man den Radius der Grundfläche $= r$, die lothrechte Höhe $= h$, so ist $\frac{r^2 \pi h}{3} = \frac{r^2}{3} \pi h = \frac{h}{3} r^2 \pi = \frac{\pi}{3} r^2 h$ die allgemeine Formel zur Berechnung jedes Kegels.

Beispiele. a) Wäre $r = 4'$ und $h = 10'$, so würde des Kegels Inhalt $= \frac{16 \times 10 \times 3,1415\ldots}{3}$ $= 160 \times 1,0471 = 167^{c\prime}\ 536^{c\prime\prime}$ seyn.

b) Für r = 1′ und h = 12′ 5″ würde der Inhalt $= \frac{100 \times 125 \times 3{,}1415}{3} = 125 \times 104{,}71 = 13^{c\prime}$ $88^{c\prime\prime}$ $750^{c\prime\prime}$.

c) Für r = 1′ und h = 1′ wird der Inhalt $= \frac{1 \times 1 \times 3{,}1415}{3} = 1{,}0471 = 1^{c\prime}\ 47^{c\prime\prime}\ 100^{c\prime\prime\prime}$.

X. Sollten prismatische oder pyramidalische Körper berechnet werden, deren Grundflächen unregelmäßig krummlinige oder gemischtlinige Figuren sind, so muß der Inhalt solcher Figuren durch die bekannte, in der Planimetrie entwickelte Annäherungsmethode bestimmt und im Uebrigen nach den bisherigen Regeln verfahren werden, worüber man leicht Beispiele berechnen kann.

XI. Um den Körperinhalt einer Kugel zu finden, bedenke man, daß derselbe $\frac{2}{3}$ von jenem eines senkrechten Cylinders ist, dessen Grundfläche mit dem größten Kreise der Kugel, und dessen Höhe mit ihrem Durchmesser gleiche Größe hat. Man darf daher nur den Inhalt dieses Cylinders berechnen und $\frac{2}{3}$ davon nehmen.

Setzt man den Halbmesser der Kugel = r, so ist $r^2\pi$ der Inhalt ihres größten Kreises und $r^2\pi 2r = 2\pi r^3$ jener des senkrechten Cylinders, wovon die Kugel $\frac{2}{3}$ ist. Daher wird ihr Inhalt $= \frac{2}{3} \times 2\pi r^3 = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi}{3} r^3 = r^3 \times 4{,}1887901 \ldots$, woraus derselbe leicht berechnet werden kann.

Beispiele. a) Für $r = 10'$ wird der Kugel-Inhalt $= 1000 \times 4{,}1887901 = 4188{,}7901 = 4188^{c'}$ $790^{c''}$ $100^{c'''}$.

b) Es sei $r = 1'$, so ist der Inhalt der Kugel $= 1 \times 4{,}1887901 = 4{,}1887901 = 4^{c'}$ $188^{c''}$ $790^{c'''}$.

c) $r = 0{,}01'$ gibt die Kugel $= 1''' \times 4{,}1887901$ $= 4{,}1887901 = 4^{c'''}$ $188^{c''''}$ $790^{c^{v}}$.

XII. Da der Inhalt der Kugel zu jenem des Würfels ihres Durchmessers ebenso in einem beständigen Verhältnisse stehen muß, wie in der Planimetrie der Inhalt des Kreises zum Quadrate seines Durchmessers auch in einem unwandelbaren Verhältnisse steht, so ist es interessant, jenes Verhältniß aufzufinden.

Setzt man den Durchmesser einer Kugel $= 10$, so ist $r = 5$ und ihr Inhalt $= \frac{2}{3} \times 5^2 \times 3{,}14 \times 10$ $= \frac{2}{3} \times 25 \times 3{,}14 \times 10 = \frac{500}{3} \times 3{,}14 = \frac{1570}{3}$.

Da aber der Würfel ihres Durchmessers $= 10^3$ $= 1000$ ist, so verhält sich der Würfel des Durchmessers zum Inhalte der Kugel, wie $1000 : \frac{1570}{3}$ d. h. wie $3000 : 1570$ oder wie $300 : 157$. Genauer ist dieses Verhältniß wie $3000000 : 1570795$.

Hierdurch ist es leicht, aus dem in Zahlen gegebenen Durchmesser einer Kugel ihren Inhalt zu berechnen. Setzt man denselben $= d$, so ist $d^3 \times \frac{157}{300}$ der Inhalt der Kugel. Da aber $\frac{157}{300} = 0{,}523333$ und $\frac{15707950}{3000000} = 0{,}523598333\ldots$ ist, so wird der

Inhalt der Kugel gefunden, wenn man den Würfel ihres Durchmessers durch 0,523333 oder, um genauer zu rechnen, durch 0,523598333... multiplicirt.

Beispiele. a) Es sei der Durchmesser = 10′, so ist $10^3 = 1000$ und die Kugel $= 1000 \times 0{,}523598333..$ $= 523^{c\prime}\ 598^{c\prime\prime}\ 333^{c\prime\prime\prime}$.

b) Wäre $d = 2''$, so fände man den Inhalt $= 8 \times 0{,}523598 = 4{,}188784^{c\prime\prime} = 4^{c\prime\prime}\ 188^{c\prime\prime\prime}\ 784^{c\prime\prime\prime\prime}$.

c) Für $d = \frac{1}{2}'' = 5'''$ würde derselbe $= 125 \times 0{,}523598 = 65{,}449750^{c\prime\prime\prime} = 65^{c\prime\prime\prime}\ 449^{c\prime\prime\prime\prime}\ 750^{cv}$.

XIII. Setzt man den Inhalt der Kugel = k, so ist $3000000 : 1570795 = d^3 : k$, daher $d^3 = \frac{3000000\,k}{1570795}$ und $d = \sqrt[3]{\frac{3000000}{1570795}\,k} = \sqrt[3]{\frac{3000000}{1570795}}\ \sqrt[3]{k} = 1{,}242\ldots\sqrt[3]{k}$.

Hieraus kann also für eine Kugel von gegebenem Inhalte die Größe ihres Durchmessers berechnet werden.

Beispiele. a) Es sei $k = 8^{c\prime}$, so wird $d = 1{,}242 \times \sqrt[3]{8} = 1{,}242 \times 2 = 2'\ 4''\ 8'''\ 4''''$.

b) Für $k = 1^{c\prime}$ wird $d = 1{,}242 \times 1 = 1'\ 2''\ 4'''\ 2''''$.

c) Wäre $k = 50^{c\prime}$, so würde nun $d = 1{,}242 \times \sqrt[3]{50} = 1{,}242 \times 3{,}684 = 4{,}575528 = 4'\ 5''\ 7'''\ 5''''$.

Die bisherigen Rechnungen bieten auch das Mittel dar, jeden gegebenen prismatischen oder pyramidalischen Körper in einen ihm gleichen Würfel zu verwandeln; eine Aufgabe, welche jener in der Planimetrie ähnlich ist, jede ebene Figur in ein ihr glei-

ches Quadrat umzuwandeln. Man berechne ihren körperlichen Inhalt, und ziehe aus der, denselben bestimmenden Zahl die Cubikwurzel, so ist diese das Maß der Seite des zu findenden Würfels. Daß diese Cubikwurzel am bequemsten durch Logarithmen gefunden wird, ist bekannt.

Nach den obigen Formeln stellt z. B. $\sqrt[3]{g \times h}$, $\sqrt[3]{\frac{g \times h}{3}}$, $\sqrt[3]{\frac{r^2 \pi h}{3}}$ die Seite jenes Würfels dar, welcher einem gegebenen prismatischen, pyramidalischen oder kegelförmigen Körper gleich ist. Auch läßt sich die Kugel in einen ihr gleichen Würfel verwandeln.

§. 3.

Berechnung der aus prismatischen, pyramidalischen und kugelförmigen Körpern entstehenden Abschnitte.

I. Wenn ein dreieckiges Prisma von einer Ebene geschnitten wird, welche gegen seine Grundfläche eine schiefe Lage hat, so besteht der vom Prisma übrig bleibende Körper aus drei dreieckigen Pyramiden, welche über jener Grundfläche errichtet sind und ihre Spitzen in den drei Endpuncten der durchschnittenen Seitenkanten haben.

Es sei (Fig. 79.) efdabc der aus dem dreieckigen Prisma durch den Abschnitt entstandene Körper, so besteht derselbe aus drei dreieckigen Pyramiden, welche das Dreieck abc zur Grundfläche und ihre Spitzen in f, e und d haben.

Wenn man die Linien fa und fc zieht, so ist fabc die erste dieser drei Pyramiden und es bleibt noch die viereckige Pyramide übrig, deren Grundfläche aedc, und deren Spitze f ist.

Wird dieselbe durch einen nach efc geführten Schnitt getheilt, so entstehen die zwei dreieckigen Pyramiden eacf und edcf.

Denkt man von e nach b eine gerade Linie, so ist über der Grundfläche eac eine zweite Pyramide eacb befindlich, welche, weil fb mit ea gleichläuft, der Pyramide eacf gleich ist. Nimmt man nun in der Pyramide eacf das Dreieck abc zur Grundfläche und e als Spitze an, so ist die Gleichheit des zweiten Pyramiden-Paares bewiesen.

Auf gleiche Weise ist, wenn man die gerade ad zieht, die Pyramide fcde der Pyramide fcda gleich, weil beide die Grundfläche fcd und die Lothe von e und von a auf dieselben, als Höhen, gemein haben. Allein die Pyramide fcda hat, wenn man acd als Grundfläche und f als Spitze betrachtet, mit der Pyramide acdb Grundfläche und Höhe gemein. Folglich sind auch die Pyramiden fcde und abcd einander gleich und die Gleichheit des dritten Paares ist hierdurch ebenfalls bewiesen.

Wäre das dreieckige Prisma nicht abgekürzt, so ist aus dem Früheren bekannt, daß es aus drei unter sich gleichen dreieckigen Pyramiden besteht, welche abc zur Grundfläche und ihre Spitzen in den Endpuncten der drei gleichen Seitenkanten $ae = bf = cd$ hätten.

Wäre das schief mit der Grundfläche abgeschnittene Prisma ein senkrechtes und $ea = h$, $fb = h'$, $dc = h''$,

so würde, wenn das Dreieck $abc = g$ gesetzt wird, sein Inhalt $= g \times \frac{1}{3} h + g \times \frac{1}{3} h' + g \times \frac{1}{3} h'' = \frac{1}{3} g \times (h + h' \times h'')$ seyn.

Wenn es aber ein schiefes dreieckiges Prisma ist; so muß das Maß der senkrechten Höhen der drei Puncte e, f und d über abc gefunden und sodann nach der Formel verfahren werden.

II. Wenn ein senkrechter Cylinder von einer Ebene schief durchschnitten wird, so kann man den Inhalt des hierdurch entstehenden Körpers leicht berechnen.

Es sei (Fig. 80.) dgbp der senkrechte Cylinder, $gn = pm$ und nach der Richtung nm eine Durchschnittsebene gelegt, welche den ganzen Körper in die zwei Stücke mnbp und mngd theilt, so ist klar, daß jedes dem andern congruent sei. Daher findet man seinen Inhalt, wenn vom Inhalte des ganzen Cylinders die Hälfte genommen wird.

Es ist aber der Inhalt des Cylinders $= pq^2\pi \times hq$; folglich jener des halben Cylinders $= pq^2\pi \times aq$. Allein man sieht leicht, daß aq die mittlere arithmetische Proportionallinie zwischen mp und nb, oder daß $aq = \frac{mp + nb}{2}$ ist. Daher wird der Inhalt des zu findenden Cylinderstücks $= pq^2\pi \times \frac{mp + nb}{2}$

Setzt man im Allgemeinen $pq = r$, $mp = s$, und $nb = S$, so ist der Inhalt des Cylinderstücks $= r^2\pi \times \frac{s + S}{2}$.

Beispiele. a) Es sei $r = 2'$, $S = 10'$ und $s = 4'$, so wird der Inhalt $= 4 \times \frac{10 + 4}{2} \times 3{,}14159 \ldots = 28 \times 3{,}14159 \ldots 87{,}96452^{c'} = 87^{c'}\ 964^{c''}\ 520^{c'''}$.

b) Für $r = 1'$, $s = 1'$ und $S = 2'$ wird der Inhalt des Körpers $= 1 \times \frac{1 + 2}{2} \times 3{,}14159 \ldots = \frac{3 \times 3{,}14159 \ldots}{2} = \frac{12{,}42477}{2} = 6{,}21238^{c'} = 6^{c'}\ 212^{c''}\ 380^{c'''}$

Wäre der gegebene Cylinder ein schiefer, so müßten anstatt der schiefen ungleichen Seitenlinien die senkrechten gemessen werden.

Es sei (Fig. 81.) nhga der schiefe Cylinder, cd die Durchschnittsebene, wobei hc = ad wäre, so muß das Cylinderstück dcga die Hälfte vom ganzen Cylinder seyn. Wird daher von diesem der Inhalt berechnet, so ist seine Hälfte dem zu findenden Körper gleich. Daß aber der Inhalt des schiefen Cylinders durch ein Product seiner Grundfläche in die senkrechte Höhe gefunden wird, ist bekannt.

Denkt man sich von c und d die Lothe cm und df, so sind die Dreiecke fda und mcg einander ähnlich, und es ist ad : df = gc : cm. Da nun die ersten drei Linien an jedem Cylinderstücke gemessen werden können, so wird die Größe von cm durch die Rechnung gefunden und die mittlere arithmetische Proportionallinie zwischen cm und df ist jene, mit deren Maße man den Inhalt der Grundfläche ag multipliciren muß, um das Cylinderstück zu berechnen.

Beispiel. Es sei gc = 10′, ad = 4′ und df = 5′, so ist $4 : 5 = 10 : cm = \frac{50}{4} = 12{,}5$ und die mittlere lothrechte Höhe des Cylinderstücks $= \frac{5 + 12{,}5}{2} = \frac{17{,}5}{2} = 8{,}75$. Daher wird dessen Inhalt, wenn $r = 1'$ ist, $= 1 \times 8{,}75 \times 3{,}14159 = 27{,}4889125^{c'} = 27^{c'}\ 488^{c''}\ 912^{c'''}$.

III. Auf ähnliche Weise kann auch der Inhalt eines senkrechten oder schiefen Cylinderstücks gefunden werden, welches entweder zwischen zwei parallellaufenden oder gegeneinander geneigten Durchschnittsebenen enthalten ist.

Es sei (Fig. 82.) fgnm ein senkrechter Cylinder und ab, cd seien zwei schiefe, unter sich gleichlaufende Durchschnittsebenen, so ist das zwischen ihnen enthaltene Cylinderstück abdc dem Unterschiede der beiden Stücke abnm und cdnm gleich. Nun ist aber

$$abnm = r^2\pi \times \frac{bn + am}{2} \text{ und}$$

$$cdnm = r^2\pi \times \frac{dn + cm}{2}; \text{ folglich}$$

$$abdc = r^2\pi \times \left(\frac{bn + am}{2} - \frac{dn + cm}{2}\right) \text{ oder}$$

$$abdc = r^2\pi \times \left(\frac{bn - dn + am - cm}{2}\right) \text{ d. h.}$$

$$abdc = r^2\pi \times \frac{bd + ac}{2} = r^2\pi \times pq, \text{ weil } bd$$

ac = pq ist.

Da aber $r^2\pi \times pq$ den Inhalt eines Cylinders von der Grundfläche mn und von der Höhe pq darstellt,

so ist das Cylinderstück abdc eben diesem Cylinder gleich und kann hierdurch leicht berechnet werden.

Für $mh = r = 2'$, und $ac = bd = pq = 3'$ wird sein Inhalt $= 4 \times 3 \times 3{,}14159 \ldots = 12 \times 3{,}14159 = 37{,}69908^{c'} = 37^{c'}\ 699^{c''}\ 80^{c'''}$.

Wenn die Durchschnittsebenen ab und cd nicht mit einander parallel sind, so wird das zwischen ihnen liegende Cylinderstück auf ähnliche Art berechnet, wie leicht durch Beispiele zu erläutern ist.

Wäre das Cylinderstück bad (Fig. 83.) zu berechnen, so ist dasselbe = abnm — adnm. Allein $abnm = r^2\pi \times \frac{bn + am}{2}$ und $adnm = r^2\pi \times \frac{am + dn}{2}$, folglich das Cylinderstück $= r^2\pi \left(\frac{bn + am}{2} - \frac{am + dn}{2}\right)$ $= r^2\pi \times \frac{bn - dn}{2} = r^2\pi \times \frac{bd}{2}$, und kann hiernach leicht berechnet werden.

Da $\frac{bd}{2} = pq$, so ist dieses Cylinderstück auch $= r^2\pi pq$; folglich einem Cylinder gleich, dessen Grundfläche jene um mn und dessen Höhe = pq ist.

Daß Letzteres so sei, folgt auch auf andere Art daraus, daß zwei, durch p und q mit mn gleichlaufend gelegte Ebenen einen Cylinder zwischen sich fassen, welcher dem Stücke bad gleich seyn muß, weil gleiche Theile zu beiden Seiten dieser Ebenen liegen.

IV. Wenn (Fig. 84.) abog ein schiefer Cylinder und bh seine senkrechte Höhe ist, so entsteht durch eine Durchschnittsebene om, welche lothrecht auf ob und ma steht, eine Figur, welche man Ellipse

nennt, und die Anschauung lehrt sogleich, daß ihre beiden Durchmesser ungleich groß sind, da der größere = go und der kleinere = mo ist.

Diese Ellipse schneidet von dem schiefen Cylinder das körperliche Stück mog ab, welches, wenn es gehörig mit go in ab gestellt wird, einen senkrechten ellipsoidisch-prismatischen Körper dbom gibt, welcher mit dem schiefen Cylinder abog einerlei Größe hat, und dessen Inhalt dadurch berechnet wird, daß man das Maß seiner Grundfläche mo mit jenem seiner Höhe bo multiplicirt.

Nun sei der Inhalt des Kreises um go = K, jener der Ellipse um mo = E, die senkrechte Höhe bh sei = h und die Höhe bo = H, so ist:

$K \times h = E \times H$, folglich hat man

$E : K = h : H$ oder $H : h = K : E$.

Nun sind aber die Dreiecke boh und ogm, weil sie gleiche Winkel haben, einander ähnlich und es verhält sich

bh : bo = om : og, folglich auch

h : H = om : og.

Es ist aber om der kleinere und og der größere Durchmesser der Ellipse mo. Daher wird man durch die Proportion

$E : K = h : H = om : og$ oder

wenn man om : og = d : D setzt, durch $D : d = K : E$ den Flächeninhalt jeder Ellipse berechnen, da D, d und K bekannte Größen sind.

Beispiel. Es sei bo = 10′, bh = 8′ und go = 4′, so ist 10 : 8 = 4 : mo = 3,2. Nun ist ½ go = 2; folglich der Kreis um go = 4 × 3,14159...,

$= 12,56636 \ldots$ und man findet durch die Proportion $4 : 3,2 = 12,56636 : E$ den Werth von $E = \frac{3,2 \times 12,56636}{4} = 3,2 \times 3,14159 = 10,053088^{q\prime}$ $= 10^{q\prime}\ 5^{q\prime\prime}\ 30^{q\prime\prime\prime}\ 88^{q\prime\prime\prime\prime}$.

Aus der Proportion $D : d = K : E$ folgt auch $D : d = \frac{D^2\pi}{4} : E$, folglich $E = \frac{Dd\pi}{4}$. Da nun auch $\frac{D^2\pi}{4} : \frac{Dd\pi}{4} = \frac{Dd\pi}{4} : \frac{d^2\pi}{4}$, so geht hieraus folgender Satz hervor: Die Fläche einer Ellipse ist die mittlere geometrische Proportionalgröße zwischen den beiden Kreisflächen um ihren großen und um ihren kleinen Durchmesser. Nennt man die Kreise K und k, so ist $K : E = E : k$ und $E = \sqrt{K \times k}$, welches bequem durch Logarithmen berechnet wird, da $\text{Log. } E = \frac{1}{2}(\text{Log. } K + \text{Log. } k)$ ist.

V. Es sei eine dreieckige Pyramide parallel mit der Grundfläche von einer Ebene durchschnitten, so wird jener Körper, welcher zwischen den beiden ähnlichen Dreiecken und den drei Seitentrapezen enthalten ist, eine parallel-abgekürzte Pyramide genennt, und es entsteht hier die Frage, wie man den Inhalt dieses Körpers berechnen kann.

Es sei (Fig. 85.) agmq die gegebene Pyramide, welche von der mit der Grundfläche qmg parallelen Ebene cbd geschnitten wird, so ist bcdmqg die abgekürzte Pyramide, deren Inhalt man bestimmen soll.

Man ziehe von der Spitze das Loth an auf die Grundfläche, welches diese in n, die Durchschnitts-

fläche aber in o schneidet, und ziehe noch die Linien ng und od, so ist klar, daß der Inhalt des Pyramidenstücks als der Unterschied der beiden Pyramiden amqg und abcd zu betrachten ist. Von der Bestimmung dieser Differenz hängt daher die Berechnung der abgekürzten Pyramide ab.

Da die Dreiecke ang und aod einander ähnlich sind, so ist

$$ga : da = no + oa : oa,$$ allein
$$ga : da = gm : db,$$ daher auch
$$gm : db = no + oa : oa.$$

Nun sei $gm = L$, $db = l$, $no = h$ und $oa = x$ so ist.

$$L : l = h + x : x,$$ daher auch
$$Lx = lh + lx$$ und $$Lx - lx = lh,$$ oder
$$(L - l)\, x = lh,$$ also $$x = \frac{lh}{L-l}.$$

Setzt man nun die große Pyramide $= P$, die kleine $= p$, die große Grundfläche $= F$, die kleine $= f$, so ist

$$P = \frac{F}{3} \times \left(h + \frac{lh}{L-l}\right)$$ und $$p = \frac{f}{3} \times \frac{lh}{L-l}.$$

Aus jenem Ausdrucke wird:

$$P = \frac{F}{3} \times \frac{Lh - lh + lh}{L - l} = \frac{F}{3} \times \frac{Lh}{L-l}$$ und aus diesem $$p = \frac{flh}{3L-3l};$$

daher ist nun auch

$$P - p = \frac{FLh}{3L-3l} - \frac{flh}{3L-3l} = \frac{FL-fl}{L-l} \times \frac{h}{3}$$

Da nun sämmtliche Größen, woraus diese Formel besteht, gemessen werden können, so ist hierdurch der Inhalt des Pyramidenstücks gefunden.

Da $L^2 : l^2 = F : f$, folglich $f = \frac{F \times l^2}{L^2}$ ist, so kann man die Größe der oberen Fläche auch hierdurch berechnen.

Beispiele. a) Es sei $F = 48^{q\prime}$, $L = 12'$, $l = 4'$ so ist, wegen $12^2 : 4^2 = 48 : f$, der Inhalt von $f = \frac{16 \times 48}{12 \times 12} = \frac{16}{12} \times 4 = \frac{16}{3}$. Setzt man nun $h = 15'$, so wird das Pyramidenstück $= \frac{48 \times 12 - \frac{16}{3} \times 4}{12 - 4} \times \frac{15}{3} = \frac{48 \times 12 - \frac{64}{3}}{8} \times 5 = (6 \times 12 - \frac{8}{3}) \times 5 = (72 - \frac{8}{3}) \times 5 = \frac{216 - 8}{3} \times 5 = \frac{208}{3} \times 5 = \frac{1040}{3} = 346\frac{2}{3}^{c\prime}$.

b) Wäre $\sphericalangle\, mqg = \sphericalangle\, bcd = R$ und $bc = 3'$, $cd = 4'$, $bd = 5'$; $mq = 6'$, $qg = 8'$, $mg = 10'$, so hätte man $F = 24^{q\prime}$ und $f = 6^{q\prime}$. Wäre ferner $h = 12'$, so würde das Pyramidenstück $= \frac{24 \times 6 - 6 \times 3}{3} \times \frac{12}{3} = (24 \times 2 - 6) \times 4 = (48 - 6) \times 4 = 42 \times 4 = 168^{c\prime}$.

Auf ähnliche Weise kann auch der Inhalt eines mit der Grundfläche parallel abgekürzten Kegels, er sei senkrecht oder schief, gefunden werden.

Es sei (Fig. 86) aqm der gegebene Kegel, bg ein mit der Grundfläche parallel geführter Durchschnitt und bgmq das zu berechnende Kegelstück.

Da jeder Kegel als eine Pyramide zu betrachten ist, so kann die vorhin für die parallel abgekürzte Pyramide gefundene Formel, nämlich $\frac{FL - fl}{L - l} \times \frac{h}{3}$ sehr leicht auf das Kegelstück angewendet werden, wenn man den Radius der Grundfläche R und jenen der Oberfläche r nennt.

Hier ist nämlich der abgekürzte Kegel $= \frac{R^2\pi R - r^2\pi r}{R - r} \times \frac{h}{3}$, worin h der lothrechte Abstand der beiden Kreisflächen bedeutet.

Setzt man das Kegelstück $= K$, so ist $K = \frac{R^3 - r^3}{R - r} \times h \times \frac{\pi}{3}$.

Wird nun mit $R - r$ wirklich in $R^3 - r^3$ dividirt und $\frac{\pi}{3}$ in Zahlen bestimmt, so erhält man $K = (R^2 + Rr + r^2) \times h \times 1{,}0471975 \ldots$

Beispiele. a) Es sei $R = 5'$, $r = 2'$ und $h = 18'$, so wird $K = (25 + 10 + 4) \times 18 \times 1{,}04719 \ldots = 39 \times 18 \times 1{,}04719 = 702 \times 1{,}04719 = 735^{c\prime}\ 127^{c\prime\prime}\ 380^{c\prime\prime\prime}$

b) Für $R = 3'$, $r = 1'$ und $h = 6'$ wird $K = (9 + 3 + 1) \times 6 \times 1{,}04719 \ldots = 13 \times 6 \times 1{,}04719 = 78 \times 1{,}04719 \ldots = 81{,}68082 = 81^{c\prime}\ 680^{c\prime\prime}\ 820^{c\prime\prime\prime}$

Setzte man $R = r$, so würde $K = (r^2 + r^2 + r^2)\, h \times 1{,}0471975 \ldots = 3r^2h \times 1{,}0471975 = r^2\pi h$ d. h. K ist nun ein Cylinder, der r zum Halbmesser seiner Grundfläche und h zur Höhe hat.

Auch kann man leicht ein Kegelstück berechnen, welches zwischen zwei, mit der Grundfläche des Kegels parallelen Durchschnittsflächen enthalten ist.

VI. Um den Inhalt eines Kugelstücks zu berechnen, welches zwischen ihrem größten Kreise und einem Parallelkreise mit ihm enthalten ist, bemerke man Folgendes:

Es sei (Fig. 75.) in dem Quadranten moac mit ca die no gleichlaufend, und man soll das Kugelstück berechnen, welches aus der Umdrehung der Figur noac um die Achsenlinie nc entsteht.

Es sei ac = r, cn = h, so ist der Inhalt des durch das Rechteck nfac entstehenden Cylinders = $r^2\pi h$; jener des aus Umdrehung des rechtwinkeligen Dreiecks enh entstandenen senkrechten Kegels $= \frac{h^2\pi h}{3} = \frac{h^3\pi}{3}$.

Da nun, nach dem im Vorhergehenden Bewiesenen, das zu berechnende Kugelstück dem Unterschiede des eben bemerkten Cylinders und Kegels gleich ist, so wird, wenn man dasselbe K nennt,

$$K = r^2\pi h - \frac{h^3\pi}{3} = \left(r^2 h - \frac{h^3}{3}\right)\pi =$$

$$\left(r^2 - \frac{h^2}{3}\right)h\pi = (3r^2 - h^2)\frac{h\pi}{3} =$$

$$\left(r^2 - \frac{h^2}{3}\right)h \times 1{,}0471975 \ldots$$

Beispiel. Es sei $r = 5'$ und $h = 3'$, so wird $K =$

$$(25 - \tfrac{9}{3}) \times 3 \times 1{,}0471975 \ldots =$$

$$(25 - 3) \times 3 \times 1{,}0471975 \ldots =$$

$$66 \times 1{,}0471975 \ldots = 69{,}1150350 = 69^{c'}\, 115^{c''}\, 35^{c'''}.$$

VII. Nun ist es auch leicht, den körperlichen Inhalt eines Kugelabschnitts, welcher kleiner als die Halbkugel ist, zu berechnen.

Es sei (Fig. 75.) bma ein Halbkreis, cm lothrecht auf ba und qf mit ba gleichlaufend, so entsteht, wenn sich die Figur nmo um mn als Achsenlinie einmal herumbewegt, ein Kugelabschnitt, dessen Inhalt bestimmt werden soll.

Hier ist klar, daß der Inhalt des Abschnitts übrig bleibt, wenn von der Halbkugel der aus Umdrehung von cnoa entstehende Körper hinweggenommen wird.

Nun war der Inhalt der Halbkugel $= \frac{2}{3} r^3 \pi$ und jener des durch cnoa erzeugten Kugelstücks

$$= r^2 \pi h - \frac{h^3 \pi}{3}; \text{ daher ist der Abschnitt}$$

$$= \frac{2}{3} r^3 \pi - r^2 \pi h + \frac{h^3 \pi}{3}; \text{ oder auch}$$

$$= \frac{2 r^3 \pi - 3 r^2 \pi h + h^3 \pi}{3} =$$

$$(2 r^3 - 3 r^2 h + h^3) \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3} \pi (r-h)^2 \times (2r + h)$$

wie die wirkliche Multiplication von $(r-h)^2$ in $2r + h$ lehret.

Beispiel. Es sei $r = 5$ und $h = cn = 3$, so ist $r - h = 5 - 3 = 2$ und $(r-h)^2 = 4$. Ferner wird $2r + h = 10 + 3 = 13$; folglich $(r-h)^2 \times 2r + h = 4 \times 13 = 52$. Da nun $\frac{\pi}{3} = \frac{3{,}14159}{3} = 1{,}04719$ ist, so wird der Abschnitt $= 1{,}04719 \times 52 = 54{,}45388 = 54^{c\prime}\ 453^{c\prime\prime}\ 880^{c\prime\prime\prime}$.

Da die Formel für den Abschnitt $= \frac{1}{3}\pi\,(r-h)^2 \times (2r+h)$ den Inhalt eines Kegels darstellt, dessen Grundfläche $= \pi\,(r-h)^2$ und dessen Höhe $= 2r + h$ ist, auch $r - h = cm - cn = nm$, gleichwie $2r + h = 2cm + cn$ wird, so ist der Kugelabschnitt einem Kegel gleich, dessen Grundfläche ein Kreis mit dem Halbmesser nm und dessen Höhe der Durchmesser der Kugel nebst cn ist.

Für den Inhalt der Halbkugel bma (welche auch als Kugelabschnitt betrachtet werden kann) ist $cn = h = o$ und die Formel wird nun $= \frac{1}{3}\,\pi \times r^2 \times 2r = \frac{2}{3}\,\pi r^3$, wie bereis oben gefunden worden ist.

Durch Anwendung der vorigen Formel kann auch der Inhalt eines Kugelstücks berechnet werden, welches zwischen zwei parallelen Durchschnittsebenen enthalten ist, da es als der Unterschied zweier Kugelschnitte betrachtet werden kann.

VIII. Wenn sich ein spitzwinkeliger Kreisausschnitt um einen seiner Halbmesser als Achsenlinie bewegt, so entsteht ein Körper, welcher Kugelpyramide genennt wird. Es drehe sich der Ansschnitt mco (Fig. 75.) um mc als feste Achsenlinie, so beschreibt co die Fläche eines senkrechten Kegels und der Bogen mo ein Stück der Kugelfläche. Der von beiden begränzte Körper ist die Kugelpyramide, deren Inhalt nun berechnet werden soll.

Da dieser Körper offenbar aus dem von der Figur mno beschriebenen Kugelabschnitt und aus dem von onc erzeugten senkrechten Kegel besteht, so darf man nur die Werthe von jenen beiden zusammen addiren. Es sei wieder $cm = r$ und $cn = h$, so ist der

Kugelabschnitt $= \frac{\pi}{3}(2r^3 - 3r^2h + h^3)$. Da nun $no^2 = co^2 - cn^2 = r^2 - h^2$ ist, so wird der Inhalt des senkrechten Kegels $= (r^2 - h^2)\frac{\pi}{3}h = (r^2h - h^3)\frac{\pi}{3}$. Folglich ist die Kugelpyramide $= \frac{\pi}{3}(2r^3 - 3r^2h + h^3 + r^2h - h^3) = \frac{\pi}{3}(2r^3 - 2r^2h) = \frac{1}{3} \times (2r - 2h)\, r^2 \pi$.

Beispiel. Es sei $r = 6'$ und $h = 4'$, so ist $2r - 2h = 12 - 8 = 4$ und $r^2 = 36$, folglich wird $\frac{1}{3}(2r - 2h)\, r^2\pi = \frac{4}{3} \times 36 \times 3{,}14159\ldots = 48 \times 3{,}14159 = 150{,}79632 = 150^{c'}\ 796^{c''}\ 320^{c'''}$.

Man sieht leicht, daß der Ausdruck $\frac{1}{3}(2r - 2h)\, r^2\pi$ auch den Inhalt eines Kegels darstellt, dessen Grundfläche $(r^2\pi)$ dem größten Kreise der Kugel und dessen Höhe dem Durchmesser desselben weniger $2\,cn$ gleich ist.

Sowohl aus der Formel, als aus Betrachtung der Figur geht hervor, daß die Kugelpyramide größer oder kleiner wird, je nachdem $2r - 2h$ oder $2(r - h)$ d. h. $2(cm - cn)$ größern oder kleinern Werth hat. Setzt man $h = r$, so wird $2(r - h) = 0$ und die Kugelpyramide verschwindet; für $h = 0$, wird $2(r - h) = 2r$ und die Formel gibt nun $\frac{1}{3} \times 2r \times r^2\pi = \frac{2}{3} r^2\pi r$ oder den Inhalt der Halbkugel.

Erhält $cn = h$ einen negativen Werth d. h. rückt es über c, nach der Verlängerung nc, hinaus, so setze man $-h$ in die Formel, welche nun diese wird: $\frac{1}{3}(2r + 2h)\, r^2\pi$, und ebenfalls den Inhalt eines Kegels darstellt.

Setzt man — h = r, so gibt die Formel, für den Inhalt der Kugelpyramide, welche hier der ganzen Kugel gleich ist, den Werth $\frac{1}{3}(2r + 2r)\, r^2\pi = \frac{4}{3}\, r^2\pi r$, welcher den Inhalt der Kugel, wie bekannt ist, darstellt.

IX. Wenn sich in dem Kreise qmpf (Fig. 87.) ein beliebiges Rechteck abgd befindet, dessen Seiten ad und bg mit dem Durchmesser mf gleichlaufend sind, und man nimmt an, der Abschnitt bpg drehe sich in der Entfernung nb = hg um die feste Achsenlinie mf einmal ganz umher, so entsteht ein Körper, dessen innere Grenze die Fläche eines senkrechten Cylinders und dessen äussere Grenze ein Stück von der Kugelfläche ist. Man soll den Inhalt desselben berechnen.

Aus dieser Entstehung des Körpers folgt, daß er als Differenz bleibt, wenn man von dem Inhalte der Kugel den Inhalt des senkrechten Cylinders abgd und der beiden Abschnitte amb = dfg wegnimmt.

Setzt man nun cn = h und cm = r, so ist der Inhalt der Kugel $= \frac{4}{3}\pi r^3$. Jener des Cylinders ist, weil $mn = r - h$; $nf = r + h$ und $nb^2 = (r-h) \times (r+h) = r^2 - h^2$ ist, $(r^2 - h^2)\, \pi \times 2h$.

Der Inhalt eines Abschnittes ist $= \frac{\pi}{3}\, (2\,r^3 - 3\,r^2h + h^3)$ und jener der zwei Abschnitte $= \frac{2\pi}{3}\, (2r^3 - 3\,r^2h + h^3)$.

Folglich ist der Inhalt des zu berechnenden Körpers

$$= \frac{4\pi}{3} r^3 - \pi(r^2 - h^2)2h - \frac{2\pi}{3}(2r^3 - 3r^2h + h^3)$$

$$= \frac{4\pi r^3}{3} - 2\pi hr^2 + 2\pi h^3 - \frac{4\pi r^3}{3} + 2\pi r^2 h - \frac{2\pi h^3}{3}$$

$$= 2\pi h^3 - \frac{2\pi h^3}{3} = \frac{6\pi h^3 - 2\pi h^3}{3} = \tfrac{4}{3}\pi h^3.$$

Da nun $\frac{4}{3}\pi h^3$ den Inhalt einer Kugel bedeutet, deren Durchmesser $= 2h =$ bg ist, so ist der von bpg erzeugte Körper dem Inhalte einer Kugel gleich, deren Durchmesser $=$ bg.

Wenn bg näher gegen mf rückt, so wird der, von dem nunmehr größeren Abschnitte erzeugte Körper ebenfalls größer, bis dieser Abschnitt zum Halbkreise und der von ihm entstandene Körper zur Kugel selbst wird.

Entfernt sich aber bg immer mehr vom Durchmesser mf, so wird der aus ihm entstehende Körper immer kleiner. Für bg $= \frac{1}{2}$ mf oder bg $= \frac{1}{4}$ mf oder bg $= \frac{1}{10}$ mf wäre derselbe $= \frac{1}{8}$ oder $= \frac{1}{64}$ oder $= \frac{1}{1000}$ vom Inhalte der ganzen Kugel.

§. 4.

Uebungs-Fragen.

I. Was heißt Messen und Maß? Was ist die Einheit des Körpermaßes? Welche verschiedene Abtheilungen hat sie? Erklärung des zehntheiligen und zwölftheiligen Maßes? Wieviele Cubikzolle enthält der Cubikfuß nach dem zehntheiligen und nach dem zwölftheiligen Maße? Beweise davon? Worauf beruhen die Verwandlungen des höheren Cubikmaßes in das niedere und umgekehrt? Erläuterung durch Beispiele? Vorzüge der zehntheiligen Abtheilung? Erläuterungen hierüber? (§. 1.)

II. Wie wird der Inhalt eines senkrechten Parallelopipedums gefunden, dessen Grundfläche ein Rechteck ist? Beweis hierüber? Wie verfährt man, wenn seine Grundfläche ein schiefes Parallelogramm ist? Wie verfährt man, wenn das Maß nicht genau in den zu messenden Linien enthalten ist? Wie findet man den Inhalt eines Würfels? Woher entstand die Benennung der Cubikzahlen in der Arithmetik? Wie berechnet man den Inhalt eines schiefen Parallelopipedums? Wie findet man den Inhalt jedes dreieckigen Prismas? Beweis der Richtigkeit dieses Verfahrens? Wie werden alle vieleckige, senkrechte oder schiefe Prismen berechnet? Wie findet man den Inhalt jedes Cylinders? Angabe und Beweis der Formel für diese Rechnung? Allgemeine Formeln für die verschiedenen Arten der prismatischen Körper? Wie findet man den Inhalt der dreiseitigen Pyramide? Angabe und Beweis der Formel dafür? Wie werden alle vieleckige Pyramiden berechnet? Angabe und Beweis der Formel für die Berechnung der Kugel? Wie berechnet man den Inhalt prismatischer oder pyramidalischer Körper, deren Grundflächen krummlinige oder gemischtlinige Figuren sind? Angabe und Beweis der Formel für den Inhalt der Kugel? Entwickelung des Verhältnisses vom Würfel des Durchmessers zum Inhalte der Kugel? Anwendung dieses Verhältnisses? Zu dem gegebenen Inhalte einer Kugel die Größe ihres Durchmessers zu finden? Wie wird jeder prismatische oder pyramidalische Körper in einen ihm gleichen Würfel verwandelt? Berechnung von Beispielen über alle bisherige Aufgaben?

III. Woraus besteht ein dreieckiges Prisma, welches durch eine Ebene schief mit der Grundfläche geschnitten wird? Beweis hierüber? Berechnung dieses Körpers? Wie wird der Körper berechnet, welcher aus einem senkrechten Cylinder durch einen schiefen Schnitt mit seiner Grundfläche entsteht? Wie berechnet man ihn bei dem schiefen Cylinder? Wie werden Cylinderstücke berechnet, welche zwischen zwei parallelen oder nicht parallelen Durchschnittsebenen enthalten sind? Ent=

stehung der Ellipse? Berechnung ihres Flächeninhaltes? Zwischen welchen Kreisebenen ist sie die mittlere geometrische Proportionalgröße und Warum? Was ist eine parallel abgekürzte Pyramide? Wie wird der Inhalt eines solchen dreieckigen Pyramidenstücks berechnet? Anwendung auf parallel abgekürzte mehrseitige Pyramiden? Wie wird der Inhalt eines parallel mit der Grundfläche abgekürzten Kegels berechten? Beispiele hierüber? Wie wird wohl der Inhalt eines dreieckigen Pyramidenstücks oder eines Kegelstücks berechnet, wenn die Durchschnittsebene nicht mit der Grundfläche gleichlaufend ist? Wie wird der Inhalt eines Kugelstücks berechnet, welches zwischen dem größten Kreise und einer Parallelebene mit ihm enthalten ist? Wie findet man den Inhalt eines Kugelabschnitts, welcher kleiner als die Halbkugel ist? Wie wird die hierdurch entstandene Formel zur Berechnung der Halbkugel und des größeren Kugelabschnittes benützt? Welchem Kegel ist jeder Kugelabschnitt gleich? Wie wird ein Kugelstück berechnet, welches zwischen zwei Parallelkreisen enthalten ist? Was ist eine Kugelpyramide? Entwickelung der Formel zur Berechnung ihres Inhaltes? Anwendung derselben auf die Berechnung der Halbkugel und eines noch größern Stückes als die Halbkugel? Entstehung und Berechnung eines Körpers, welcher von der Fläche eines senkrechten Cylinders und einem Theile der Kugelfläche begränzt ist? (§. 3.)

II. Lehrübung.

Berechnung der Oberflächen der Körper.

§. 1.

Berechnung der Seitenflächen und Umfangsflächen prismatischer Körper.

I. Wenn die prismatischen Körper eckige sind, so treten hier folgende Hauptfälle ein:

Ist der gegebene Körper ein Würfel, so hat derselbe vier congruente quadratische Seitenflächen und man darf nur den Inhalt der einen viermal nehmen, um die gesammte Seitenfläche zu erhalten. Es sei dessen Seite $= 3'$, so ist diese Seitenfläche $= 4 \times 3^2 = 36^{q'}$. Die gesammte Umfangsfläche wäre $= 36 + 18 = 54^{q'}$.

Wäre die Grundfläche eines senkrechten Parallelopipedums ein Quadrat, so sind dessen vier Seitenflächen vier congruente Rechtecke, deren Summe die Seitenfläche bildet. Wäre die Seite der Grundfläche $= 2'$ die Kante $= 10'$, so ist dieselbe $= 4 \times 2 \times 10 = 80^{q'}$ und die gesammte Umfangsfläche $= 80 + 2 \times 4 = 88^{q'}$.

Ist die Grundfläche des senkrechten Parallelopipedums ein Rechteck, so sind zwei gegenüberliegende Seitenflächen einander congruent und die Summe ihres Doppelten gibt die Seitenfläche. Es sei die größere Seite der Grundfläche $= 7'$, die kleinere $= 5'$ und die Höhe des Körpers $= 12'$, so ist das größere Seiten-Rechteck $= 7 \times 12 = 84^{q'}$ und das kleinere $= 5 \times 12 = 60^{q'}$, somit die Seitenfläche $= 2 \times 84 + 2 \times 60 = 168 + 120 = 288^{q'}$. Die gesammte Umfangsfläche wäre $= 288 + 2 \times 7 \times 5 = 288 + 70 = 358^{q'} = 3^{q°}\ 58^{q'}$.

Wenn ein gegebenes Parallelopipedum einseitig schief d. h. so beschaffen ist, daß ein aus einem Scheitel der Oberfläche auf die Grundfläche gezogenes Loth sich innerhalb einer Seitenfläche befindet, so sind zwei seiner gegenüberliegenden Seitenflächen zwei congruente Rechtecke; die beiden andern aber

zwei congruente Schiefecke, welche einzeln berechnet und addirt, die verlangte Seitenfläche zur Summe geben.

Ist aber das Parallelopipedum ein allseitig schiefes, so sind seine vier Seitenflächen Schiefecke und paarweis gegenüberliegend congruent. Ist nun auch noch die Grundfläche ein Schiefeck, so besteht dessen gesammte Umfangsfläche aus sechs Schiefecken, und kann somit ebenfalls leicht berechnet werden.

Auf ähnliche Art wird auch die Seitenfläche der dreieckigen und mehreckigen Prismen berechnet werden. Sind diese Körper senkrecht, so multiplicirt man das Maß des Umfangs ihrer Grundfläche mit dem Maße ihrer Höhe, um den Inhalt der Seitenfläche zu erhalten. Wäre z. B. die Seite eines gleichseitigen senkrechten dreieckigen Prismas $= 3'$ und dessen Höhe $= 12'$, so würde seine Seitenfläche $= (3 + 3 + 3) \times 12 = 9 \times 12 = 108^{q'} = 1^{qo}\ 8^{q'}$ seyn. Da nun (Mathematischer Jugendfreund 3. Band. Seite 253.) $\triangle = \sqrt{\frac{1}{2} s. (\frac{1}{2} s - a). (\frac{1}{2} s - b). (\frac{1}{2} s - c)}$, so wird hier die Grundfläche, weil $a = 9' = b = c$ ist, $= \sqrt{\frac{9}{2} \times (\frac{9}{2} - 3) \times (\frac{9}{2} - 3) \times (\frac{9}{2} - 3)} =$

$$\sqrt{\tfrac{9}{2} \times \tfrac{3}{2} \times \tfrac{3}{2} \times \tfrac{3}{2}} = \sqrt{\tfrac{9}{2} \times \frac{27}{8}} = \sqrt{\frac{243}{16}}$$

$= \frac{1}{4} \sqrt{243} = \frac{1}{4} \times 15{,}5884573 = 3{,}8971143 = 3^{q'}\ 89''\ 71'''\ 14''''$. Folglich ist die gesammte Umfangsfläche $= 1^{qo}\ 8' + 7^{qo}\ 79'\ 42''\ 28'''' = 8^{qo}\ 87'\ 42''\ 28'''$.

Wären aber die sechs Umfangslinien der Grundfläche eines sechseckigen senkrechten Prismas nach ihrer Ordnung $= 3', 5', 2', 4', 1'$ und $7'$, so würde die

Seitenfläche, wenn die Höhe = 10′ wäre = (3 + 5 + 2 + 4 + 1 + 7) × 10 = 22 × 10 = 220q′ = 2q° 20′ seyn.

Sind die vieleckigen Prismen schief, so bestehen die Seitenflächen gewöhnlich aus schiefen Parallelogrammen, und werden wie diese berechnet und in eine Summe gebracht. Einige dieser Seitenflächen können aber auch Rechtecke seyn.

II. Wenn die krumme Seitenfläche des senkrechten Cylinders berechnet werden soll, so erinnere man sich, daß sie einem Rechtecke gleichet, dessen Grundlinie die Peripherie seiner Grundfläche und dessen Höhe seine Achse ist. Setzt man den Halbmesser der Grundfläche = r, seine Höhe = h, so ist diese Seitenfläche = $2r\pi h$.

Wäre z. B. r = 5′ und h = 15′, so fände man sie = 10 × 15 × 3,14159 . . = 15 × 31,4159 = 471,2385 = 4q° 71′ 23″ 85‴.

Da nun der Inhalt der Grundfläche dieses Cylinders = $r^2\pi$ ist, so wird seine gesammte Umfangsfläche = $2r\pi h + 2r^2\pi = 2r\pi \times (h + r)$.

Für obiges Beispiel ist derselbe = 10 × 3,14159 . . × 20 = 31,14159 . . × 20 = 622,8318 = 6q° 22′ 83″ 18‴.

Da der Ausdruck $2r\pi \times (h + r)$ den Inhalt eines Rechtecks darstellt, dessen eine Seite = $2r\pi$, die andere = h + r ist, so muß die Gesammtfläche eines senkrechten Cylinders einem Rechtecke gleich seyn, dessen eine Seite die Peripherie seiner Grundfläche, die andere aber die Summe aus seiner Höhe und aus ihrem Halbmesser ist.

III. Wollte man den Halbmesser eines Kreises $= x$ finden, welcher der gesammten Umfangsfläche eines senkrechten Cylinders gleich wäre, so müßte $x^2\pi = 2r\pi\,(h + r)$ folglich $x^2 = 2r\,(h + r)$ und $2r : x = x : r + h$ seyn; d. h. der zu findende Halbmesser ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem Durchmesser der Grundfläche und der Summe aus ihrem Halbmesser nebst der Höhe des Cylinders. Für $r = 2'$ und $h = 10'$ wird $x^2 = 4 \times 12 = 48$. Daher denn $x = \sqrt{48} = 6{,}928203 = 6'\ 9''\ 2'''\ 8''''$. Auch kann der Werth von x durch jenen von $2r$ und $h + r$ geometrisch construirt werden.

Um den Halbmesser eines Kreises zu finden, welcher in seiner Fläche der krummen Seitenfläche des senkrechten Cylinders gleich ist, nenne man denselben x, so wird $x^2\pi = 2r\pi h$, folglich $x^2 = 2rh$ und $2r : x = x : h$ d. h. dieser Halbmesser ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem Durchmesser der Grundfläche und der Höhe des Cylinders. Für $r = 2'$ und $h = 10'$ wird nun $x^2 = 4 \times 10 = 40$ und $x = \sqrt{40} = 6{,}324555 = 6'\ 3''\ 2'''\ 4''''$ . . . Auch kann die Größe von x durch Construction gefunden werden.

Setzte man hier $2r = h$, so wäre $x^2 = 4r^2$ folglich $x = 2r$, d. h. die krumme Seitenfläche eines senkrechten Cylinders, dessen Höhe dem Durchmesser seiner Grundfläche gleich ist, ist so groß, als ein Kreis, dessen Halbmesser die Größe jenes Durchmessers hat. Daher ist die krumme Seitenfläche hier auch viermal so groß, als die Grundfläche des Cylinders, oder noch einmal so groß, als seine Grund-

fläche und Oberfläche zusammengenommen. Wäre die Höhe des lothrechten Cylinders dem Halbmesser seiner Grundfläche gleich, oder wäre $h = r$, so müßte auch $x^2 = 2r^2$, folglich die Seitenfläche noch einmal so groß, als dessen Grundfläche und somit die Summe der zwei Grundflächen der Seitenfläche gleich seyn.

Nach diesem Muster lassen sich noch andere bestimmte Verhältnisse zwischen Grundfläche und Seitenfläche darstellen.

IV. Wenn R und r die Halbmesser, H und h die Seiten zweier senkrechten Cylinder bedeuten, so verhalten sich ihre krumme Seitenflächen wie $2R\pi H : 2r\pi h$, oder wie $DH : dh$, wenn D und d die Durchmesser ihrer Grundflächen sind. Da aber DH und dh jene Rechtecke darstellen, welche aus ihrem Achsenschnitte entstehen, so verhalten sich die Seitenflächen zweier lothrechten Cylinder wie die Flächen dieser Achsenschnitte. Sollen also diese krummen Seitenflächen in einem bestimmten Verhältnisse z. B. von $m : n$ stehen, so dürfte man nur zwei Rechtecke construiren, welche sich wie $m : n$ verhalten. Wäre z. B. $m : n = 48 : 18$, so könnte man $D = 6$, $H = 8$, $d = 2$ und $h = 9$ setzen. Beschriebe man nun diese zwei Rechtecke, so könnten sie sich entweder um die Seiten 8 und 9 oder um die Seiten 6 und 2 herum drehen, um zwei senkrechte Cylinder zu erzeugen, deren Seitenflächen sich wie $48 : 18 = 8 : 3$ verhalten.

V. So einfach die Berechnung der Seitenfläche des senkrechten Cylinders ist, so schwierig wird jene des schiefen. Wenn man denselben durch eine Ebene, auf seiner Achse lothrecht durchschneidet, so entsteht

eine Ellipse und durch gehöriges Zusammenstellen der beiden körperlichen Segmente ein senkrecht-prismatischer Körper, dessen Grundfläche eben diese Ellipse und dessen Seitenfläche jener des gegebenen schiefen Cylinders gleich ist. Um letztere zu berechnen, müßte man den Umfang der Ellipse, seinem Maße nach, mit jenem der lothrechten Höhe multipliciren. Nun kann aber der Umfang der Ellipse nur durch die höhere Analysis gefunden werden; folglich überschreitet diese Aufgabe bei weitem die Grenzen der Elementar-Geometrie und kann hier nicht befriedigend gelöset werden.

§. 2.

Berechnung der Seiten- und Umfangsflächen pyramidalischer Körper.

I. Um die Seitenfläche der eckigen pyramidalischen Körper zu berechnen, bedenke man, daß dieselbe Dreiecke sind und folglich wie diese berechnet werden. Im Besondern können folgende Fälle stattfinden.

Wenn über einem gleichseitigen Dreiecke eine lothrechte Pyramide sich befindet, so ist jedes ihrer drei Seitendreiecke ein gleichschenkeliges und dem andern congruent. Wird daher der Inhalt von einem mit drei multiplicirt, so erhält man die gesammte Seitenfläche. Es sei die Grundlinie eines dieser Dreiecke $= 2'$ und die Seitenkante der Pyramide $= 10'$, so ist die Fläche desselben, nach der Formel

$$\triangle = \sqrt{\tfrac{1}{2} s. (\tfrac{1}{2} s - a). (\tfrac{1}{2} s - b). (\tfrac{1}{2} s - c)}$$

$= \sqrt{11 \times (11-10) \times (11-2) \times (11-2)} = \sqrt{11 \times 1 \times 9 \times 9} = 9\sqrt{11} = 9 \times 3{,}3166\ldots = 29{,}8494 = 29^{q\circ}\ 84^{q\prime}\ 94^{q\prime\prime}$ und die gesammte Seitenfläche $= 89^{q\circ}\ 54^{\prime}\ 82^{\prime\prime}$.

Wäre die Grundfläche einer senkrechten Pyramide ein Quadrat, so muß ebenfalls der Inhalt eines Seitendreiecks berechnet und derselbe mit vier multiplicirt werden. Diese Seitendreiecke sind auch hier wieder gleichschenkelig.

Auf eben diese Weise verfährt man bei jeder senkrechten Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist.

Sind aber die Pyramiden schiefe, so haben auch ihre Seitenflächen verschiedene Größe und müssen einzeln genommen berechnet werden. Die Summe aller bildet sodann ihre Umfangsfläche.

Sollte aber die gesammte Umfangsfläche der eckigen pyramidalischen Körper gefunden werden, so müßte man noch zu ihrer Seitenfläche den Inhalt der Grundfläche addiren. Der einfachste Fall hat hier bei dem Tetraëder statt, welches in vier unter sich congruente gleichseitige Dreiecke eingeschlossen ist.

II. Unter den runden pyramidalischen Körpern ist der senkrechte Kegel der einfachste. Um seine krumme Seitenfläche zu berechnen, denkt man sich die Peripherie seiner Grundfläche als ein regelmäßiges Vieleck von sehr vielen Seiten und von dessen Spitze nach jedem Scheitelpuncte desselben eine gerade Linie gezogen, wodurch die Seitenfläche als die Summe sehr vieler congruenten Dreiecke erscheint, deren gemeinschaftliche Höhe die Seite des Kegels ist.

Daher wird denn die krumme Seitenfläche desselben einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie die Peripherie seiner Grundfläche und dessen Höhe seiner Seitenlinie gleich ist. Setzt man den Halbmesser der Basis = r, die Seite = l, so ist die krumme Umfangsfläche $= \frac{2 r\pi l}{2} = r\pi l$.

Wäre r = 3′ und l = 10′, so ist die krumme Kegelfläche = 3 × 10 × 3,14159 . . . = 3 × 31,4159 = 94,2477 = 94□′ 24″ 77‴.

Denkt man sich den senkrechten Kegel, auf einer Ebene liegend, einmal ganz und gar in derselben herumbewegt, so bildet seine Seitenfläche einen Kreisausschnitt, dessen Radius der Seite des Kegels und dessen Bogen der Peripherie seiner Grundfläche gleich ist. Da man nun den Inhalt dieses Ausschnitts findet, wenn das Maß seines Bogens mit dem Maße seines halben Halbmessers multiplicirt wird, so folgt auch hieraus die Richtigkeit der vorigen Formel.

III. Um den Halbmesser eines Kreises zu finden, welcher mit der Seitenfläche eines senkrechten Kegels einerlei Inhalt hat, setze man denselben = x, so ist hier $x^2\pi = r\pi l$, folglich $x^2 = rl$ und $r : x = x : l$, d. h. der zu findende Radius ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem Halbmesser der Grundfläche und der Seite des Kegels. Wäre r = 2′ und l = 9′, so ist $x^2 = 18$ und $x = \sqrt{18} = 4,2426$ = 4′ 2″ 4‴ . . . .

Auch kann die Größe von x durch geometrische Construction gefunden werden.

Soll die gesammte Umfangsfläche eines senkrechten Kegels in einen ihr gleichen Kreis verwandelt werden, so ist jene Fläche $= r^2\pi + r\pi l = (r + l)\ r\pi$. Da nun $(r + l)\ r\pi = x^2\pi$ seyn soll, so ist auch $(r + l)\ r = x^2$ und daher $r : x = x : r + l$, d. h. der zu findende Halbmesser ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem Halbmesser und der Summe aus diesem Halbmesser und der Seite des Kegels. Für $r = 5'$ und $l = 15'$ wird $x^2 = 20 \times 5 = 100$, folglich $x = 10$. Wäre $r = 3'$ und $l = 10'$, so würde $x^2 = 13 \times 3 = 39$ und $x = \sqrt{39} = 6{,}24499 = 6'\ 2''\ 4''' \ldots$

IV. Es seien bei zwei senkrechten Kegel die Halbmesser der Grundflächen R und r, die Seiten L und l, so sind ihre Seitenflächen in dem Verhältnisse von $R\pi L : r\pi l = RL : rl$. Da aber, wenn A und a die Achsen der Kegel bedeuten, $L : l = A : a$ ist, folglich $L = \frac{lA}{a}$ und $l = \frac{La}{A}$ wird, so ist auch $RL : rl = \frac{RlA}{a} : \frac{rLa}{A}$. Nun ist aber aus $L : l = A : a$ auch $\frac{l}{a} = \frac{L}{A}$ folglich $RL : rl = RA : ra$. Nun stellen aber RA und ra die Flächeninhalte der Achsendreiecke der gegebenen Kegel vor. Folglich verhalten sich die krummen Oberflächen zweier senkrechten Kegel wie diese Achsendreiecke.

V. Da die Peripherie der Grundfläche eines senkrechten Kegels $= 2 r\pi$ und jene eines Kreises, dessen Radius $= l$, der Seite des Kegels gleich ist, $= 2 l\pi$ wird, auch letztere immer größer als erstere

seyn muß, so wird die Proportion $2l\pi : 2r\pi = 360° : x°$ oder $l : r = 360° : x°$ für x die Anzahl von Graden angeben, welche die ganze mit r beschriebene Peripherie von jener mit l beschriebenen ist, wenn jene als ein Theil von dieser gedacht wird. Daher gibt diese Proportion $l : r = 360° : x°$ die Größe des Winkels im Ausschnitte an, welchem die Seitenfläche des Kegels ist.

Für $r = \frac{1}{2} l$ wird $l = 2r$ und $l : r = 2 : 1 = 360° : 180°$, wo der Ausschnitt zum Halbkreise würde.

Für $r = \frac{1}{3} l$ wird $l : r = 3 : 1 = 360° : 120°$ und der Winkel des Ausschnitts wäre $= 120°$.

Auch kann man umgekehrt einen gegebenen Kreisausschnitt in die krumme Seitenfläche eines senkrechten Kegels verwandeln, dessen Seite so groß als dessen Halbmesser wäre. Es sei der Winkel des Ausschnittes $= 36°$, so ist $360° : 36° = l : r$. Wäre nun $l = 8'$, so wird $r = \frac{36 \times 8}{360} = 0{,}8 = 8''$.

Für einen Ausschnittswinkel $= 40°$ und $l = 12'$ würde $r = \frac{40}{360} \times 12 = \frac{1}{9} \times 12 = 1'\ 3''\ 3''' \ldots$

Die Berechnung der krummen Seitenfläche eines schiefen Kegels kann nicht durch die Elementargeometrie gegeben werden. Man erkennt auch sogleich, daß, wenn derselbe mit seiner kleinsten Seitenlinie in eine Ebene gelegt und zur Hälfte darin herumgedreht wird, eine ebene Figur entsteht, welche keinen Kreisabschnitt bildet.

VI. Wenn sich über einem Kreise, dessen Radius $= r$ ist, ein senkrechter Cylinder und ein solcher Kegel befindet, welcher mit ihm einerlei Höhe hat, und wenn des Cylinders Seite $= h$, des Kegels Seite $= l$ ist, so wird die Seitenfläche des Cylindes $= 2r\pi h$ und jene des Kegels $= r\pi l$; folglich verhält sich jene zu dieser wie $2r\pi h : r\pi l = 2h : l$.

Setzt man daher $2h = l$ oder $h = \frac{1}{2} l$, so ist die Seitenfläche des Cylinders jener des Kegels gleich, welches folgenden allgemeinen Satz gibt: Wenn ein senkrechter Cylinder mit einem senkrechten Kegel gleiche Grundfläche, aber eine Höhe hat, welche der halben Seite des Kegels gleich ist, so ist die krumme Cylinderfläche der krummen Kegelfläche gleich.

Auch lassen sich andere Verhältnisse dieser Flächen durch Construction darstellen.

VII. Die Gesammtfläche des senkrechten Cylinders verhält sich zur gesammten Umfangsfläche des lothrechten Kegels wie $2r\pi\,(h + r) : r\pi\,(r + l)$ d. h. wie $2h + 2r : r + l$. Sollen also beide Umfangsflächen einander gleich seyn, so müßte auch

$$2h + 2r = r + l, \text{ folglich}$$
$$2h + r = l \text{ seyn.}$$

Wenn daher über der nämlichen Grundfläche ein senkrechter Cylinder und ein senkrechter Kegel steht, und die Seite des letztern so groß ist, als die Summe aus der doppelten Seite des erstern nebst dem Radius der Grundfläche, so sind die gesammten Umfangsflächen beider Körper von gleicher Größe.

Es sei $r = 2'$, $h = 10'$ und $l = 2 \times 10 + 2 = 22'$, so ist die krumme Seitenfläche des Cylinders

$= 4 \times \pi \times 10 = 40\pi$ und dessen doppelte Grundfläche $= 2 \times 4\pi = 8\pi$; folglich die gesammte Umfangsfläche $= 48\pi$.

Nun ist aber die krumme Seitenfläche des senkrechten Kegels $= 2 \times 2\pi \times \frac{22}{2} = 4\pi \times 11 = 44\pi$. Des Kegels Grundfläche ist aber $= 2 \times 2\pi = 4\pi$; folglich seine Gesammtfläche ebenfalls $= 48\pi$ wie zuvor.

Auch lassen sich andere Verhältnisse dieser Umfangsflächen auffinden.

§. 3.

Berechnung der Kugeloberfläche.

I. Es ist aus dem Vorhergehenden bekannt, daß der körperliche Inhalt einer Kugel als eine Pyramide betrachtet werden kann, deren Grundfläche die Kugelfläche und deren Höhe der Radius ist. Nun wird aber der Inhalt einer Pyramide durch ein Product aus dem Maße ihrer Grundfläche in das Maß des dritten Theils ihrer Höhe bestimmt. Folglich ist auch der Inhalt der Kugel einem Producte aus dem Maße ihrer Oberfläche in jenes vom Drittheile ihres Radius gleich. Setzt man die Kugel $= K$, ihre Oberfläche $= F$ und ihren Halbmesser $= r$, so ist demnach $K = F \times \frac{r}{3}$. Folglich muß auch $F = \frac{3K}{r}$ seyn; d. h. man findet die Oberfläche der Kugel, wenn ihr dreifacher Inhalt durch ihren Radius, dem Maße nach, dividirt wird.

Da nun $K = \frac{4 r^3 \pi}{3}$ ist, so wird $F = \frac{3 \times 4 r^3 \pi}{3 r}$ $= 4 r^2 \pi$. Nun ist aber $r^2 \pi$ die Fläche des größten Kreises der Kugel; folglich ist die Kugelfläche ($=4r^2\pi$) viermal so groß, als die Fläche ihres größten Kreises.

Da $4 r^2 \pi = 2 r \times 2 r \pi$, folglich einem Producte aus dem Durchmesser in die Peripherie des größten Kreises gleich ist, so wird auch die Kugelfläche berechnet, wenn man das Maß ihres Durchmessers in jenes vom Umfange ihres größten Kreises multiplicirt

Beispiele. a) Es sei $r = 1'$, so wird $F = 4 \times 1 \times 3{,}141592 \ldots = 4 \times 3{,}141592 = 12{,}566368$ $= 12^{q\prime}\ 56''\ 63'''\ 68''''$.

b) Für $r = 10'$ würde $F = 4 \times 10^2 \times \pi = 400 \times 3{,}141592 = 125{,}66368 = 125^{q\prime}\ 66''\ 36''' \ldots$ $= 1^{q\circ}\ 25'\ 66''\ 36''' \ldots$

II. Wollte man eine gegebene ebene Fläche als Kugelfläche betrachten und den ihr zugehörigen Halbmesser finden, so wird aus der Formel $F = 4 r^2 \pi$ nunmehr $r^2 = \frac{F}{4\pi} = \frac{F}{4 \times 3{,}141592}$ und folglich $r = \sqrt{F} \times \sqrt{\frac{1}{12{,}566368}}$. Nun ist $\sqrt{12{,}566368} = 3{,}544$; folglich $r = \sqrt{F} \times \frac{1}{3{,}544} = \sqrt{F} \times 0{,}282$.

Beispiele. a) Es sei $F = 64^{q\prime}$, so wird $r = \sqrt{64} \times 0{,}282 = 8 \times 0{,}282 = 2{,}256 = 2'\ 2''\ 5'''\ 6''''$.

b) Wäre $F = 40^{q\prime}$, so würde $r = \sqrt{40} \times 0{,}282 = 6{,}324 \times 0{,}292 = 1{,}783368 = 1'\ 7''\ 8''' \ldots$

c) Für $F = 1^{q'}$ wird $r = 1 \times 0{,}282 = 2''\ 8'''\ 2''''$.

Wollte man diese Beispiele durch Logarithmen rechnen, so würde aus der Formel: $r^2 = \frac{F}{4\pi}$ nunmehr diese: $2\ \text{Log}\ r = \text{Log}.\ F - \text{Log}.\ 4\pi$, folglich $\text{Log}.\ r = \frac{\text{Log}.\ F - \text{Log}.\ 4\pi}{2}$.

Beispiel. Es sei wieder $F = 64$, so ist $\text{Log}.\ 64 = 1{,}8061800$, $\text{Log}.\ \pi = 0{,}4971498726941338543512 7\ldots$ folglich $\text{Log}.\ 4\pi = \text{Log}.\ 4 + \text{Log}.\ \pi = 0{,}6020600 + 0{,}4971498 = 1{,}0992098$ und die Rechnung ist diese:

$$\begin{array}{rl} \text{Log}.\ F & = 1{,}8061800 \\ \text{Log}.\ 4\pi & = \underline{1{,}0992098} \\ & 2)\ 0{,}7069702 \text{ folglich} \\ \text{Log}.\ r & = 0{,}3534851 \end{array}$$

Da nun hierzu die Zahl 2,2567 gehört, so stimmt dieser Werth mit dem vorhin gefundenen genau überein.

Auf ähnliche Weise können auch andere der frühern Beispiele durch Logarithmen berechnet werden.

III. Es sei eine Kugel und ein senkrechter Cylinder gegeben, welcher ihren größten Kreis zur Grundfläche und ihren Durchmesser zur Höhe hat, so ist, wenn man ihren Halbmesser $= r$ setzt, die Seitenfläche dieses Cylinders $= 2r\pi \times 2r = 4r^2\pi$. Da aber auch die Kugelfläche $= 4r^2\pi$ ist, so hat hier das bemerkenswerthe Verhältniß statt, daß die Kugelfläche der krummen Seitenfläche jenes senkrechten Cylinders gleich ist, in welchen sie nach Höhe und Dicke gerade gestellt werden kann.

Da nun der körperliche Inhalt dieser Kugel $\frac{2}{3}$ von jenem des sie umschließenden Cylinders ist, so stehen die hier benannten krummen Flächen dieser Körper nicht in dem Verhältnisse ihrer Inhalte.

Die Gesammtfläche des Cylinders ist aber $= 4r^2\pi + 2r^2\pi = 6r^2\pi$; folglich anderthalbmal so groß als die vorhin berechnete Kugelfläche, und es schließet diese keinen verhältnißmäßig größern Raum ein, als die Umfangsfläche des Cylinders. Benennt man nämlich Inhalt und Umfang der Kugel mit K und f, und des Cylinders mit C und F, so ist

$K : C = \frac{2}{3} : 1 = 2 : 3$ und

$f : F = 1 : 1\frac{1}{2} = 2 : 3$, folglich

$K : C = f : F$, d. h. Es verhält sich die Kugel zum Cylinder, der sie genau umschliesét, wie sich die Kugelfläche zur Gesammtfläche dieses Cylinders verhält; oder Inhalt und Umfang dieser Körper stehen im geraden Verhältnisse.

IV. Aus diesen Vordersätzen ergeben sich nachstehende Folgerungen:

Die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser oder ihrer Halbmesser. Denn wenn R und r diese Halbmesser sind, so ist das Verhältniß ihrer Oberflächen $= 4R^2\pi : 4r^2\pi$ d. h. $= R^2 : r^2$. Ist also $R = 2r$, so ist jene Kugelfläche viermal so groß als diese.

Da $4r^2\pi = 2r \times 2r\pi$ ist, so wird die Kugelfläche einem Rechtecke gleich seyn, dessen eine Seite der Durchmesser, die andere aber die Peripherie des größten Kreises ist

Setzt man $x^2\pi = 4r^2\pi$, so wird $x^2 = 4r^2$ und somit $x = 2r$ d. h. wenn man mit einem Halbmesser, welcher dem Durchmesser der Kugel gleich ist, einen Kreis beschreibt, so muß dieser Kreis der Oberfläche der Kugel gleich seyn.

Nennt man den Durchmesser zweier Kreise D und d, ihre Peripherien P und p, ihre Flächen F und f und die Inhalte der ihnen entsprechenden Kugeln K und k, so ist

1) $P : p = D : d$

2) $F : f = D^2 : d^2$ und

3) $K : k = D^3 : d^3$.

Für $D = 2$ und $d = 1$ würde

$P : p = 2 : 1$

$F : f = 4 : 1$

$K : k = 8 : 1$.

§. 4.

Berechnung der Oberflächen der abgekürzten prismatischen Körper.

I. Wenn die Pyramide parallel mit der Grundfläche durchschnitten ist, so sind die Seitenflächen des zwischen den zwei Parallelebenen enthaltenen Stücks soviele Paralleltrapeze, als die Grundfläche Seiten hat und müssen demnach, wie diese, einzeln berechnet und in eine Summe gebracht werden.

Wäre der Inhalt der die ganze Pyramide umschließenden Seitendreiecke bekannt, so dürfte man nur die durch sie laufenden, mit ihren Grundlinien parallelen Linien messen und durch den Hülfssatz, daß

sich ähnliche Dreiecke wie die Quadrate ihrer ähnlichliegenden Linien verhalten, die kleinen Dreiecke berechnen und von den ihnen ähnlichen größern abziehen.

Ist aber eine Pyramide schief gegen die Grundfläche durchschnitten, so müssen die hierdurch entstehenden Seiten-Vierecke als gewöhnliche Trapeze berechnet werden und ihre Summe ist die verlangte Seitenfläche.

Wollte man die gesammte Umfangsfläche einer solchen abgekürzten Pyramide berechnen, so müßte noch die Grundfläche nebst der (ihr bisweilen ähnliche) Oberfläche das Pyramidenstücks zur Seitenfläche addirt werden.

Beispiele in Zahlen lassen sich hiernach leicht berechnen.

II. Wenn eckige prismatische Körper parallel mit der Grundfläche durchschnitten werden, so bilden die Seitenflächen des zwischen der Grundfläche und der schneidenden Ebene enthaltenen Körpers soviele Parallelogramme, als diese Grundfläche Seiten hat, und man wird ihre Summe, je nachdem der Körper senkrecht oder schief ist, leicht berechnen können.

Sind aber eckige prismatische Körper schief mit der Grundfläche durchschnitten, so bilden die Seitenflächen beider Segmente soviele Parallel-Trapeze, als ihre Grundflächen Seiten haben und werden demnach wie diese berechnet.

Wenn ein eckig-prismatischer Körper von einer Ebene so geschnitten wird, daß der Schnitt durch eine Grenzlinie seiner Grundfläche oder durch diese

Grundfläche selbst geht, so wird man die Seitenflächen des hierdurch entstehenden Segmentes ebenfalls, nach dem Bisherigen, leicht berechnen können.

Auch lassen sich Beispiele in Zahlen leicht zur Erläuterung geben.

III. Nun sei die Seitenfläche eines senkrechten, schief mit seiner Grundfläche durchschnittenen Cylinders zu berechnen. Wäre mnbp (Fig. 80.) dieses Cylinderstück, dessen Seitenfläche bestimmt werden soll, so ist aus dem Vorhergehenden bekannt, daß sie die Hälfte der Seitenfläche um dgbp gleich sei. Setzt man nun $nb = S$ und $mp = s$, so ist $gb = S + s$ und die Seitenfläche des ganzen Cylinders, $= 2 r\pi \times (S + s)$. Daher ist jene um $mnbp = r\pi (S + s)$ d. h. sie ist einem Rechtecke gleich, dessen eine Seite die halbe Peripherie der Grundfläche und dessen andere Seite die Summe der größten und kleinsten Seitenlinie des Segmentes ist.

Beispiel. Für $r = 3'$, $S = 10'$ und $s = 4'$ wird die Seitenfläche $= (10 + 4) \times 3 \times 3{,}14159 = 14 \times 9{,}42477 \ldots = 131{,}94678 = 1^{\square^o}\ 31'\ 94''\ 67''' \ldots$

IV. Um die Frage zu beantworten, wie groß der Halbmesser eines Kreises sei, dessen Fläche der Seitenfläche dieses Cylinderstücks gleich ist, setze man $x^2\pi = r\pi (S + s)$, so wird $x^2 = r (S + s)$ und folglich $x = \sqrt{r (S + s)}$.

Beispiel. Es sei $r = 2'$, $S = 12'$ und $s = 4'$, so wird $r = \sqrt{2 \times 16} = \sqrt{32} = 5{,}65685 \ldots = 5'\ 6''\ 5''' \ldots$

Aus $x^2 = r \times (S + s)$ folgt auch die Proportion $r : x = x : S + s$ d. h. der Halbmesser des zufindenden Kreises ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem Radius der Grundfläche und der Summe aus der größten und kleinsten Seite des Abschnitts.

Setzt man $r = S + s$, was leicht durch die Construction dargestellt werden kann, so wird $x = r$, d. h. in diesem Falle ist die Seitenfläche des Abschnitts der Grundfläche gleich.

Für $r = \frac{1}{2} (S + s)$ wird $2r = S + s$ und die Gleichung $x^2 = r \times (S + s)$ gibt hier $x^2 = \frac{1}{2} (S + s)^2$; folglich $x = (S + s) \sqrt{\frac{1}{2}} = (S + s) \sqrt{0,5} = 0,707106 \times (S + s)$.

Sollte die krumme Seitenfläche der doppelten Grundfläche gleich seyn, so müßte $r^2\pi = \frac{r\pi (S + s)}{2}$, folglich $r = \frac{1}{2} (S + s)$ seyn, wie aus dem kurz Vorhergehenden auch schon klar ist.

V. Um den Inhalt jenes Theils der krummen Seitenfläche eines senkrechten Cylinders zu finden, welcher zwischen zwei schiefen, unter sich parallelen Durchschnittsflächen enthalten ist, bemerke man, daß dieselbe der Differenz zweier Stücke jener Cylinderfläche gleich ist, für welche oben (in III.) die Formel gefunden worden ist. Nimmt man S und s in der bisherigen Bedeutung und setzt $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{s}$ im ähnlichem Sinne und $S > \mathfrak{S}$, so wie $s > \mathfrak{s}$, so ist die größere Seitenfläche $= r\pi (S + s)$ und die kleinere Seitenfläche $= r\pi (\mathfrak{S} + \mathfrak{s})$; folglich das zu findende Flächenstück $= r\pi (S + s) - r\pi (\mathfrak{S} + \mathfrak{s})$

$= r\pi\,((S + s) - (\mathfrak{S} + \mathfrak{s})) = r\pi\,(S - \mathfrak{S} + s - \mathfrak{s})$. Nun ist aber, wegen der parallelen Durchschnitts-Ebenen, $S - \mathfrak{S} = s - \mathfrak{s}$; folglich wird die zufindende Fläche $= r\pi\,(2S - 2s) = 2r\pi\,(S - \mathfrak{S})$.

Daher wird dieses Flächenstück einem Rechtecke gleich, dessen eine Seite der Umfang der Grundfläche des Cylinders, die andere aber der Unterschied der Seitenlinien S und $\mathfrak{S}$ ist.

Um den Radius eines Kreises zu finden, welcher diesem Flächenstücke gleich ist, setze man ihn $= x$, so wird $x^2\pi = 2r\pi\,(S - \mathfrak{S})$, und folglich $x^2 = 2r\,(S - \mathfrak{S})$ oder auch $2r : x = x : S - \mathfrak{S}$ d. h. der zu findende Halbmesser ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem Durchmesser der Grundfläche und dem Unterschiede der Seitenlinien $(S - \mathfrak{S})$.

Nähme man nun z. B. $S - \mathfrak{S} = 2r$, so würde das Flächenstück nun anstatt $2r\pi\,(S - \mathfrak{S})$ den Werth $2r\pi \times 2r = 4r^2\pi$ erhalten, d. h. es wäre in diesem Falle der vierfachen Grundfläche des Cylinders gleich.

Beispiele. a) Es sei $r = 5'$ und $S - \mathfrak{S} = 12' - 10' = 2'$, so würde das Flächenstück $= 10 \times 3{,}14159\ldots \times 2 = 31{,}415\ldots \times 2 = 62{,}83\ldots$ $62^{q'}\ 83''$. Auch würde hier $x = \sqrt{10 \times 2} = \sqrt{20} = 4{,}4721359 = 4'\ 4''\ 7'''\ 2''''$.

b) Wäre $r = 1'$, so würde das Flächenstück $= 2 \times 3{,}14159 \times 2 = 4 \times 3{,}14159\ldots = 12{,}56636 = 12^{q'}\ 56''\ 63'''\ldots$ Auch würde $x = \sqrt{2 \times 2} = \sqrt{4} = 2'$.

VI. Um die Seitenfläche eines Kegelstücks zu finden, welches zwischen der Grundfläche und einem

mit ihr parallel geführten Durchschnitte des senkrechten Kegels enthalten ist, muß die Seitenfläche des durch den Schnitt entstandenen kleinen Kegels von jener des gegebenen abgezogen werden. Setzt man die Halbmesser ihrer Grundflächen = R und = r, ihre Seiten = L und = l, so ist die zufindende Fläche = $R\pi L - r\pi l = \pi\,(RL - rl)$, wobei man leicht erkenn , daß immer R : L = r : l ist.

Beispiel. Es sei R = 4, L = 12, r = 2 und l = b, so ist die zufindende Fläche = $(4 \times 12 - 2 \times 6) \times 3{,}141592 \ldots = (48 - 12) \cdot 3{,}141592 = 36 \times 3{,}141592 \ldots = 113{,}097312 = 1^{q\circ}\ 13'\ 09''\ 73'''\ 12''''$.

Um den Halbmesser eines Kreises zu finden, welcher der krummen Seitenfläche des abgekürzten Kegels gleich ist, setze man $x^2\pi = \pi\,(RL - rl)$ woraus $x = \sqrt{(RL - rl)}$ wird.

Beispiel. Wenn R, L, r und l die vorigen Werthe haben, so wird $x = \sqrt{36} = 6$, welches für die krumme Seitenfläche denselbigen Werth gibt, wie zuvor.

VII. Da $(R + r) \times (L - l) = RL + rL - Rl - rl$ und wegen R : r = L : l auch $Rl = rL$ ist, so muß die krumme Fläche des Kegelstücks = $(RL - rl)\,\pi$ nunmehr auch $= (R + r)\,(L - l)\,\pi = (R\pi + r\pi)\ L - l = (2\,R\pi + 2\,r\pi)\,\frac{L - l}{2}$.

Nun stellt aber $2\,R\pi$ die Peripherie der Grundfläche und $2\,r\pi$ jene der Oberfläche, endlich $\frac{L - l}{2}$ die halbe Seite des Kegelstücks vor. Folglich ist die krumme

Seitenfläche des abgekürzten Kegels einem Parallel-trapeze gleich, dessen Parallel-Seiten der beiden Peripherien der Grund- und Oberfläche sind, und dessen Höhe der halben Seitenlinie dieses Kegelstücks gleich ist.

Die Richtigkeit dieses Satzes geht auch daraus hervor, daß die Seitenfläche des gegebenen und des abgeschnittenen kleineren Kegels als ein Kreisausschnitt und die Umfangsfläche des Kegelstücks als die Differenz von beiden angesehen werden kann.

VIII. Setzt man nun $x^2\pi = (R + r) \times (L - l)\pi$, so wird hieraus $x^2 = (R + r)(L - l)$ und es ist $R + r : x = x : L - l$, d. h. die mittlere Proportionallinie zwischen der Summe der beiden Halbmesser und der Seite des abgekürzten Kegels ist der Halbmesser eines Kreises, welcher der Seitenfläche dieses Kegelstücks gleich ist.

Setzt man $R + r = L - l$, so ist auch $x = L - l$ und die krumme Seitenfläche ist nun $= (L - l)^2\pi$ d. h. einem Kreise gleich, dessen Halbmesser der Seite des Kegelstücks gleich wird.

Auf ähnliche Art lassen sich noch andere bestimmte Verhältnisse entwickeln.

Die gesammte Umfangsfläche des abgekürzten Kegelstücks ist $= (R + r) \times (L - l)\pi + R^2\pi + r^2\pi =$
$= ((R + r) \times (L - l) + R^2 + r^2)\pi$.

Beispiel. Es sei $R = 6$, $r = 2$, $L = 15$, $l = 5$, so ist die Gesammtfläche des Kegelstücks $= (8 \times 10 + 36 + 4) \times 3{,}141592 \ldots = 120 \times 3{,}141592 \ldots$
$= 376{,}99204 = 3^{\square°}\ 76'\ 99{,}'\ 10'' \ldots$

IX. Noch ist jenes Stück der Kugelfläche zu berechnen, welches durch einen Kugelabschnitt bestimmt wird. Es sei (Fig. 75.) bam die Halbkugel, vo die schneidende Ebene und vmo die zu bestimmende Fläche, so stellt vco eine Kugelpyramide vor, deren Grundfläche gefunden wird, wenn man das Maß ihres Inhaltes durch jenes vom dritten Theil ihres Radius dividirt. Nun ist aber, wenn $cn = h$ gesetzt wird, der Inhalt dieser Kugelpyramide $= \frac{2}{3} r^2\pi\ (r - h)$; folglich wird ihre Grundfläche $= \frac{2}{3} r^2\pi\ (r - h) : \frac{1}{3}\ r = 2r\pi\ (r - h) = 2r^2\pi - 2rh\pi$ d. h. die krumme Fläche des Kugelabschnitts wird erhalten, wenn man von $2r^2\pi$ oder von der Fläche der Halbkugel die Fläche eines Rechtecks abzieht, dessen eine Seite, $2r\pi$, der größte Kreis der Kugel und dessen andere Seite, h, dem Abstande der schneidenden Ebene vom Mittelpuncte der Kugel gleich ist.

Beispiel. Es sei $r = 3'$ und $h = 2'$, so wird die zufindende Fläche $= 6 \times 3{,}141592\ (3 - 2) = 18{,}849552 = 18^{q\prime}\ 84''\ 95'''\ 52''''$.

Setzt man in dem Ausdrucke $2r\pi\ (r - h)$ den Werth von $h = o$, so wird er $= 2r^2\pi$ und stellt die halbe Kugelfläche vor, wie dieses auch hier seyn muß. Nimmt man aber $h = r$, so wird $2r\pi\ (r - h) = o$ d. h. die Ebene ist nun keine schneidende mehr, sondern eine Berührungs-Ebene der Kugel.

X. Wenn man sich eine gerade Linie von m nach o denkt, so ist $mo^q = mn^q + no^q = (r - h)^2 + r^2 - h^2 = r^2 - 2rh + h^2 + r^2 - h^2 = 2r^2 - 2rh$. Nun ist aber $(2r^2 - 2rh)\ \pi$ der Inhalt der krummen Fläche des Abschnitts. Folglich stellt auch mo^q

$\times \pi$ denselben dar. Allein $mo^q \times \pi$ ist der Inhalt eines Kreises mit dem Halbmesser $=$ mo. Daher ist auch die krumme Fläche des Abschnitts diesem Kreise gleich.

Beispiel. Es sei $r = 5'$, $h = 3'$, so ist $no^q = 25 - 9 = 16$ und $mn^q = (5 - 3)^q = 4$; folglich $mo^q = 16 + 4 = 20$ und die krumme Fläche wird $= 20 \times 3,141592 \ldots = 62,83184 = 62^{q\prime}\, 83''\, 18''' \ldots$

Je kleiner h wird, desto näher rückt die schneidende Ebene gegen ba und desto größer wird mo. Fällt vo in ba selbst, so wird der Abschnitt nunmehr zur Halbkugel, deren krumme Oberfläche dem mit ma beschriebenen Kreise gleich ist, wie man auch bereits aus dem Früheren weiß.

Eben dieses Verhältniß der von m ausgehenden Linien hat noch dann Statt, wenn die schneidende Ebene unter ba herunter fällt, und sie kann sich einmal um den Durchmesser von m entfernen, wo dann die von m ausgehende Linie diesem Durchmesser selbst gleich wird und $2r \times 2r \times \pi = 4r^2\pi$ die ganze Kugelfläche gibt.

XI. Nimmt man zwischen n und m einen willkührlichen Punct, welcher N heissen soll und legt durch N eine mit vo gleichlaufende Durchschnitts-Ebene, so wird das zwischen diesen zwei Kreisen enthaltene Stück der Kugelfläche eine Kugelzone genennt. Wenn von der krummen Fläche des größern Abschnitts jene des kleinern Abschnitts weggenommen wird, so bleibt die Fläche der Kugelzone als Differenz. Nun ist die krumme Fläche des größern Abschnitts $= 2r^2\pi - 2rh\pi$ und jene des kleinern $= 2r^2\pi - 2rH\pi$; folglich die Zone $= 2rH\pi - 2rh\pi = 2r\pi\,(H - h)$

d. h. die Fläche der Zone ist der Seitenfläche eines senkrechten Cylinders gleich, dessen Grundfläche der größte Kreis der Kugel und dessen Höhe der lothrechte Abstand der beiden Parallelkreise ist.

Um den Halbmesser eines Kreises zu finden, welcher der Kugelzone gleich ist, setze man $x^2\pi = 2\,r\pi\,(H - h)$, so wird nun $x^2 = 2\,r\,(H - h)$ und es ist $x = \sqrt{2\,r\,(H - h)}$. Auch hat man $2\,r : x = x : H - h$, d. h. der Radius des zu findenden Kreises ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem Durchmesser der Kugel und dem lothrechten Abstande der zwei Parallelkreise.

Beispiel. Es sei $r = 5'$ und $H - h = 2'$, so wird die Fläche der Zone $= 10 \times 3{,}141592 \ldots \times 2 = 31{,}141592 \ldots \times 2 = 62{,}282184 = 62^{q\prime}\ 28'\ 21''\ 84'''$. Auch wird hier $x = \sqrt{10 \times 2} = \sqrt{20} = 4{,}47213 \ldots$

XII. Da in dem Ausdrucke für die Fläche der Kugelzone, nämlich in $2\,r\pi\,(H - h)$ der Factor $2\,r\pi$, für dieselbige Kugel eine unveränderliche Größe ist, so hängt die Größe jener Zone von dem andern Factor $H - h$ ab. Daher verhalten sich mehrere Kugelzonen zu einander, wie ihre lothrechte Höhen und wenn man den Halbmesser der Kugel in irgend eine Menge gleicher Theile theilt und durch diese Theilungspuncte Parallelkreise legt, so sind die zwischen je zwei derselben enthaltenen Kugelzonen gleich an ihren Seitenflächen.

Wenn man diese Theilung für den ganzen Durchmesser der Kugel ausführt, so wird auch hieraus begreiflich, daß ihre gesammte Oberfläche der Seiten-

fläche eines senkrechten Cylinders gleich ist, dessen Grundfläche ihr größter Kreis und dessen Höhe ihr Durchmesser ist.

XIII. Noch können hier folgende Aufgaben gegeben werden.

a) Man soll den Inhalt jenes Stücks der Kugelfläche finden, welches zwischen zwei Durchschnittskreisen enthalten ist, die nicht mit einander gleichlaufend sind.

b) Wenn durch einen willkührlichen Punct der Kugelfläche zwei Durchschnittskreise geführt sind, welche sich unter einem spitzen Neigungswinkel schneiden, die Größe der krummen Seitenfläche des zwischen ihnen liegenden Kugelstücks zu berechnen,

deren Auflösung sich aus dem Bisherigen leicht ableiten läßt. Auch können diese Fälle sodann noch durch Beispiele erläutert werden.

§. 5.

Uebungs-Fragen.

I. Welche Hauptfälle treten bei der Berechnung der Seitenflächen eckigprismatischer Körper ein? Wie werden sie aufgelöset? Erläuterung durch Beispiele? Wie heißt die Formel zur Berechnung der Seitenfläche des senkrechten Cylinders? Welchem Rechtecke ist sie gleich? Wie findet man den Halbmesser eines Kreises, welcher mit ihr gleiche Größe hat? Wie heißt die Formel für des lothrechten Cylinders gesammte Umfangsfläche? Welchem Kreise ist sie gleich? Angabe und Entwickelung einiger besondern, hier eintretenden Fälle in Bezug auf bestimmte Zahlenverhältnisse? Wie verhalten sich die Seitenflächen zweier verschiedener senkrechten Cylinder von ver-

schiedener Grundfläche und Höhe? Was ist von der Seitenfläche des schiefen Cylinders zu halten? Wovon hängt ihre Berechnung ab? (§. 1.)

II. Angabe und Entwickelung der Hauptfälle, welche bei Berechnung des Umfangs der eckigen pyramidalischen Körper vorkommen? Erläuterung durch Beispiele in Zahlen? Wie heißt die Formel zur Berechnung der Seitenfläche des senkrechten Kegels? Wie wird die Richtigkeit derselben bewiesen? Welchem Sector ist diese krumme Kegelfläche gleich? Wie findet man den Radius eines ihr gleichen Kreises? Wie heißt die Formel für die gesammte Umfangsfläche des senkrechten Kegels? Welchem Kreise ist sie gleich? Wie verhalten sich die krummen Seitenflächen zweier senkrechten Kegel von verschiedener Grundfläche und Höhe? Wie findet man den Winkel des Ausschnitts, welcher der Seitenfläche eines gegebenen senkrechten Kegels gleich ist? Wie wird ein gegebener Kreisausschnitt in eine ihm gleiche Kugelfläche verwandelt? Was ist von der Aufgabe: die Seitenfläche des schiefen Kegels zu berechnen, zu halten? Entwickelung der Formeln, um Cylinderflächen mit Kegelflächen zu vergleichen? Beispiele? (§. 2.)

III Welcher Pyramide ist der Inhalt einer Kugel gleich? Wie findet man hieraus die Größe der Kugelfläche? Angabe der Formel für dieselbe? Wie verhält sie sich zur Fläche des größten Kreises der Kugel? Wie findet man den Halbmesser einer Kugel, deren Fläche eine bestimmte Größe haben soll? Berechnung von Zahlenbeispielen? Vergleichung der Kugelfläche mit jenem eines senkrechten Cylinders, in welchen die Kugel gerade gestellt werden kann? Wie verhalten sich bei zwei Kugeln die Peripherien ihrer größten Kreise; wie die Flächen derselben und wie ihre körperlichen Inhalte? (§. 3.)

IV. Entwickelung der Fälle, welche bei Berechnung der Seitenflächen der parallel oder schief abgekürzten eckigen prismatischen Körper statt finden? Erläuterung durch Beispiele in Zahlen? Angabe der Formel für die Berechnung der Seitenfläche eines schief durchschnittenen senkrechten Cylinders? Wie

groß ist der Halbmesser eines Kreises, welcher dieser Fläche gleich ist? Angabe einiger besondern Fälle welche hierbei statt finden können? Darstellung der Formel für die Seitenfläche eines mi der Grundfläche parallel abgekürzten Kegels? Welchem Paralleltrapeze ist sie gleich? Wie wird der Halbmesser eines Kreises gefunden, welcher der Seitenfläche dieses Kegelstücks gleich ist? Welche Formel stellt den Inhalt der Gesammtfläche eines solchen Kegelstücks dar? Welche Formel dient zur Berechnurg des Inhalts der krummen Fläche eines Kugelabschnitts? Welche Formel würde seine Gesammtfläche ausdrücken? Einige Folgerungen hieraus? Wie wird der Halbmesser eines Kreises gefunden, dessen Inhalt der krummen Fläche des Kugelabschnitts gleich ist? Folgerungen hieraus? Entwickelung der Formel für die Kugelzone? Welchem Kreise ist sie gleich? Welcher Factor ist bei ihrer Formel eine beständige, welcher eine veränderliche Größe? Folgerungen hieraus? Entwickelung der Formeln für die in XII. angeführten Aufgaben? (§. 4.)

Achter Lehrgang.

Anwendungen der Algebra auf Linien, Flächen und Körper.

I. Lehrübung.

Algebraische Entwikelung von Linien-Verhältnissen.

§. 1.

Erste Aufgabe.

I. Wenn AB (Fig. 88.) eine gegebene gerade Linie ist, so soll diese dergestalt in C getheilt werden, daß sich AB : AC = AC : CB verhält.

II. Es sei $AB = a$ und $AC = x$, so ist $CB = a - x$ und es soll in der Proportion $a : x = x : a - x$ der Werth von x bestimmt werden. Hier ist nun

$$x^2 = a^2 - ax, \text{ folglich}$$

$$x^2 + ax = a^2, \text{ daher}$$

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \text{ und}$$

$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}, \text{ endlich}$$

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

III. Beispiel. Für $a = 20$ wird $x = \frac{20}{2} \times (\sqrt{5} - 1) = 10 \times 2{,}236068 - 1 = 10 \times 1{,}236068 = 12{,}36068$. Folglich ist $CB = a - x = 20 - 12{,}36068 = 7{,}73932$.

IV. Um den Werth von $x = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{a}{2}$ geometrisch zu construiren, setze man (Fig. 88.) $AB = a$ und $BD = \frac{1}{2}a$ unter dem rechten Winkel ABD zusammen und ziehe AD, so wird $AD = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. Wird nun $DF = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$ gemacht, so ist $AF = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{a}{2}$. Nimmt man nun $AC = AF$, so ist C der zufindende Punct und $AC = x$.

§. 2.

Zweite Aufgabe.

I. Wenn eine in B (Fig. 89.) auf irgend eine Weise getheilte gerade Linie gegeben ist, dieselbe in D so zu theilen, daß $AD : DC = DC : BD$ ist.

II. Es sei AB $= a$, BC $= b$, DB $= x$, so ist DC $= b - x$ und DA $= a + x$, und man soll in der Proportion

$$a + x : b - x = b - x : x$$

den Werth von x bestimmen. Man erhält

$$ax + x^2 = b^2 - 2bx + x^2, \text{ folglich}$$

$$ax = b^2 - 2bx \text{ und}$$

$$ax + 2bx = b^2, \text{ oder}$$

$(a + 2b)\,x = b^2$; somit endlich $x = \frac{b^2}{a + 2b}$.

III. Beispiel. Es sei $a = 16$, $b = 8$, so wird $x = \frac{64}{16 + 2 \times 8} = \frac{64}{32} = 2$ und es ist $16 + 2 : 8 - 2 = 8 - 2 : 2$.

Für $a = 5$, $b = 10$ wird $x = \frac{100}{5 + 20} = \frac{100}{25} = 4$, und es ist wieder $5 + 4 : 10 - 4 = 10 - 4 : 4$.

Wäre $a = 3$, $b = 7$, so würde $x = \frac{49}{3 + 14} = \frac{49}{17}$.

IV. Um diesen Werth von x geometrisch zu construiren, leite man aus $x = \frac{b^2}{a + 2b}$ die Proportion ab $a + 2b : b = b : x$ und suche nun auf die bekannte Weise zu $a + 2b$, b und b die vierte geometrische Proportionallinie.

§. 3.

Dritte Aufgabe.

I. Eine gegebene in B getheilte gerade Linie so in dem Puncte D zu theilen, daß (Fig. 89.) CB : DB = DA : BA ist.

II. Es sei CB $=$ a, BA $=$ b, DB $=$ x, so ist DA $=$ b $+$ x und man erhält die Proportion:

$$a : x = b + x : b, \text{ folglich}$$
$$ab = bx + x^2 \text{ und}$$
$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = ab + \frac{b^2}{4} \text{ daher}$$
$$x + \frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + ab\right)} \text{ und endlich}$$
$$x = \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + ab\right)} - \frac{b}{2} \text{ oder}$$
$$x = \frac{\sqrt{(b^2 + 4ab)} - b}{2}.$$

III. Beispiel. Man setze a $= 4$, b $= 6$, so wird x $\frac{\sqrt{(36 + 96)} - 6}{2} = \frac{\sqrt{132}}{2} - 3 = \frac{11{,}4891253}{2} - 3 = 5{,}7445626 - 3 = 2{,}7445626.$

IV. Zur geometrischen Construction des gefundenen Werthes dienet folgendes. Man suche (Fig. 90.) zwischen EG $=$ b und GF $=$ a eine mittlere geometrische Proportionallinie GH, so ist diese $= \sqrt{ab}$. Wird nun GI $= \frac{1}{2}$b gemacht und HI gezogen, so ist HI $= \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + ab\right)}$. Endlich nehme man IK $=$ IG, so ist HK $= \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + ab\right)} - \frac{1}{2}b$.

§. 4.

Vierte Aufgabe

I. Eine gegebene gerade Linie dergestalt in zwei Theile zu theilen, daß sich das erste Segment so zu

einer gegebenen geraden verhält, wie sich eine ebenfalls gegebene dritte gerade zum zweiten Segmente der ersten verhält. Wenn (Fig. 91.) AB, DE und FG die drei gegebenen Linien sind, so soll AB so getheilt werden, daß AC : DE = FG : CB ist.

II. Man setze AB = a, DE = b, FG = c, AC = x, so ist CB = a — x und es soll x : b = c : a — x seyn. Hieraus wird nun sogleich

$ax - x^2 = bc$, oder auch

$x^2 - ax = -bc$, daher

$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - bc$ und

$x - \frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - bc\right)}$ daher endlich

$x = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - bc\right)} + \frac{a}{2}$ oder auch

$$x = \frac{\sqrt{(a^2 - 4bc)} + a}{2}.$$

Soll daher dieser Werth von x eine mögliche Größe seyn, so muß $4bc < a^2$ bleiben. Nimmt man $4bc = a^2$, so wird $x = \frac{1}{2}a$.

III. Beispiele. 1) Es sei a = 20, b = 3 und c = 5, so wird $x = \frac{\sqrt{(20^2 - 4 \times 3 \times 5)} + 20}{2}$ $= \frac{\sqrt{(400 - 60)}}{2} + 10 = \frac{\sqrt{340}}{2} + 10 = \frac{18,4390889}{2} + 10 = 9,2195444 + 10 = 19,2195444.$

2) Für a = 20, b = 4 und c = 10 wird $x = \frac{\sqrt{(400 - 160)} + 20}{2} = \frac{\sqrt{240}}{2} + 10 = \frac{15,4919333}{2} + 10 = 7,7459666 + 10 = 17,7459666.$

3) Setzte man $a = 12$, $b = 2$ und $c = 18$, so würde $x = \frac{\sqrt{(144 - 144)} + 12}{2} = 6$ und man hätte die Proportion $6 : 2 = 18 : 6$.

IV. Die geometrische Construction dieses Werthes ist folgende. Wenn man zwischen $HI = b$ (Fig. 92.) und $IK = c$ eine mittlere geometrische Proportionallinie IM sucht, so ist $IM = \sqrt{bc}$. Wird nun $IL = \frac{a}{2}$ gemacht, aus L ein Kreisbogen beschrieben, welcher von der mit HL parallelen MP in P geschnitten wird, so ist $MN = x$ und $MP = a - x$.

Denn wenn von L auf MP das Loth LO gezogen wird, so ist $NO = OP$ und $OL = MI = \sqrt{bc}$. Allein es ist $NL = LI = \frac{a}{2}$; folglich $NO = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - bc\right)}$. Da nun $MO = IL = \frac{a}{2}$, so wird $MN = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - bc\right)} = x$ und folglich $PM = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - bc\right)} + a - x$.

§. 5.

Fünfte Aufgabe.

I. Eine gegebene gerade Linie so zu theilen, daß das aus ihr und aus ihrem kleinern Segmente zu bildende Rechteck jenem andern Rechtecke gleich ist, welches aus dem größern Segmente und aus dem Unterschiede beider Segmente entsteht.

Wenn (Fig. 91.) AB die gegebene Linie ist, so soll sie so in C getheilt werden, daß das Rechteck aus

AB und AC dem Rechtecke aus BC und BC — AC gleich ist.

II. Es sei AB $= a$, AC $= x$, so ist BC $= a - x$ und BC — AC $= a - 2x$ und es soll

$ax = (a - x)(a - 2x)$ seyn. Dies gibt

$ax = a^2 - 3ax + 2x^2$ folglich

$-2x^2 + 4ax = a^2$ oder

$x^2 - 2ax = -\frac{a^2}{2}$ daher

$x^2 - 2ax + a^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$ und auch

$a^2 - 2ax + x^2 = \frac{a^2}{2}$ daher $a - x = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$

und endlich $x = a - \sqrt{\frac{a^2}{2}}$.

III. Beispiele. 1) Es sei $a = 1$, so ist $x = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} = 1 - \sqrt{0,5} = 1 - 0,70710678 = 0,29289322$.

2) Für $a = 12$ wird $x = 12 - \sqrt{\frac{144}{2}} = 12 - \sqrt{72} = 12 - 8,4852814 = 3,5147186$.

IV. Dieser Werth von x kann leicht construirt werden. Wenn man zwischen $\frac{a}{2}$ und a eine mittlere geometrische Proportionallinie sucht, so ist diese $= \sqrt{\frac{a^2}{2}}$. Wird nun diese Linie von a weggenommen, so ist die Differenz $= a - \sqrt{\frac{a^2}{2}} = x$.

V. Da $\sqrt{\frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{a^2} = a\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $\sqrt{\frac{1}{2}}$ eine arithmetische Irrational-Größe ist, so muß auch der Zahlenwerth von x immer irrational seyn.

VI. Aus der obigen Gleichung $ax = (a - x)(a - 2x)$ folgt auch

$a : a - 2x = a - x : x$, oder

$a - 2x : a = x : a - x$ folglich

$2a - 2x : a = a : a - x$, somit auch

$a - x : \frac{a}{2} = a : a - x$ endlich

$\frac{a}{2} : a - x = a - x : a$, woraus, wie zuvor

$\sqrt{\frac{a^2}{2}} = a - x$ und folglich $x = a - \sqrt{\frac{a^2}{2}}$ wird.

§. 6.

Sechste Aufgabe.

I. Der Halbmesser eines Kreises ist gegeben. Man soll die Seite des in ihn zu construirenden regelmäßigen Dreiecks bestimmen.

Es sei (Fig. 93.) EB der gegebene Radius, so wird, wenn man mit ihm den Kreis BDAC beschreibt, BD = BE macht, ED zieht, auf sie das Loth BF errichtet und bis A verlängert, die Sehne BA, als Seite des regelmäßigen Dreiecks, zu bestimmen seyn.

II. Es sei nun EB = BD = DE = r und BA = x, so ist DF = EF = $\frac{1}{2}$ r und BF = AF = $\frac{1}{2}$ x. Da nun $BF^2 = BD^2 - DF^2$ ist, so hat man $\frac{x^2}{4} = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4}$ folglich auch $x^2 = 3r^2$, woraus $x = \sqrt{3r^2} = r\sqrt{3}$ wird. Da nun $\sqrt{3}$ eine arithmetische Irrationalgröße ist, so wird auch der Zahlenwerth von BA immer eine solche seyn.

III. Beispiele. 1) Es sei $r = 10$, so wird $x = 10\sqrt{3} = 10 \times 1{,}7320508 = 17{,}320508$.

2) Für $r = 1$ wird $x = 1{,}7320508$.

3) Wäre $r = \frac{1}{2}$, so würde $x = 0{,}8660254$.

IV. Die geometrische Construction des Werthes $x^2 = 3r^2$ ist sehr einfach, da man die Proportion $3r : x = x : r$ hat und folglich nur zwischen $3r$ und r die mittlere geometrische Proportionallinie zu finden hat.

V. Aus der Gleichung $x^2 = 3r^2$, folgt auch $r^2 : x^2 = 1 : 3$. Da nun r die Seite des in den Kreis zu beschreibenden regelmäßigen Sechsecks ist, so muß das Quadrat der Seite eines regulären Dreiecks im Kreise dreimal so groß als das Quadrat der Seite des regelmäßigen Sechsecks in dem nämlichen Kreise seyn, und man könnte auch hierdurch die Aufgabe lösen: Ein Quadrat zu bilden, welches dreimal so groß, als ein gegebenes ist.

VI. Es sei die Seite zu einem regelmäßigen Dreiecke im Kreise $= s$ gegeben, so muß, wenn der Radius desselben y heißt, nun auch $3y^2 = s^2$, folglich $y^2 = \frac{1}{3}s^2$ und $y = \sqrt{\frac{1}{3}s^2} = s\sqrt{\frac{1}{3}} = s \times 0{,}5773\ldots.$

Um den Werth von y geometrisch zu construiren, darf man nur in der aus demselben fliesenden Proportion $s : y = y : \frac{s}{3}$ die mittlere geometrische Proportionallinie bestimmen.

VII. Da $\frac{1}{2}AB = BF = AF$ der Sinus des Winkels $E = 60°$ ist, so ist in dem obigen Ausdrucke (II.) $x = r\sqrt{3}$ der Werth von $\frac{x}{2} = \sin.\ 60°$. Daher wird, für $r = 1$, $\sin.\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1{,}7320508}{2} = 0{,}8660254$.

§. 7.

Siebente Aufgabe.

I. Der Halbmesser des Kreises ist gegeben. Man soll die Seite des in ihn zu construirenden regelmäßigen Zehnecks finden.

Wenn CB (Fig. 94.) der Halbmesser des gegebenen Kreises ist, so soll man in dem mit demselben beschriebenen Kreise BAMN die Seite des regulären Zehnecks bestimmen.

II. Es sei CB = r und BA, die zufindende Linie, = x, so ist der Bogen BA $= \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$. Daher ist nun $\angle$ CBA $= \angle$ CAB $= \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$. Wird nun BA über A verlängert, bis AD = AC ist und nun DC gezogen, so ist $\angle$ CAD $= 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ und daher $\angle D = \angle ACD = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$, auch $\angle DCB = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$. Folglich ist das Dreieck BCD dem Dreiecke BAC ähnlich und man hat BD : BC = BC : BA, oder $r + x : r = r : x$, daher $r^2 = xr + x^2$ und $x^2 + rx + \frac{r^2}{4} = r^2 + \frac{r^2}{4} = \frac{5r^2}{4}$, $x + \frac{r}{2} = \sqrt{\frac{5r^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{5}$ und $x = -\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{5} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$, folglich $x = r \times 0{,}6180340\ldots$ und man erkennt, daß, wegen des Factors $\sqrt{5}$, der Werth von x immer eine arithmetische Irrationalzahl seyn muß.

III. Zur geometrischen Construction des Werthes $x^2 = \frac{5\,r^2}{4}$ errichte man aus der Mitte des gegebenen Durchmessers AB (Fig. 95.) den lothrechten Halbmesser $CD = r$, halbire CB in E, so ist $CE = \frac{r}{2}$; folglich $DE^2 = DC^2 + CE^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} = \frac{5\,r^2}{4}$ und $DE = \sqrt{\frac{5\,r^2}{4}}$. Wird nun aus C mit CD der Bogen DF beschrieben, so ist $CF = \sqrt{\frac{5\,r^2}{4}}$ und, weil $EC = \frac{r}{2}$, $CF = \sqrt{\left(\frac{5r^2}{4}\right)} - \frac{r}{2}$ die zufindende Seite des Zehnecks.

IV. Da die halbe Seite des regelmäßigen Zehnecks der Sinus eines Winkels von 18° ist, so findet man hierdurch $\sin. 18° = \frac{0{,}6180340}{2} = 0{,}3090170$, wobei der Halbmesser = 1 gesetzt ist.

§. 8.

Achte Aufgabe.

I. Wenn der Halbmesser eines Kreises gegeben ist, so soll man die Seite des in ihn zu beschreibenden regelmäßigen Fünfecks bestimmen.

In dem mit dem Halbmesser CA (Fig. 96.) beschriebenen Kreise ABMN soll die Seite des regulären Fünfecks gefunden werden.

II. Es sei $CA = CD = CB = r$ und AB, als Seite des regelmäßigen Fünfecks, $= x$, so ist BD, als Seite des regelmäßigen Zehnecks, $= \sqrt{\left(\frac{5\,r^2}{4}\right)}$

$-\frac{r}{2}$. Da nun $CE^2 = CB^2 - BE^2$ ist, so wird $CE^2 = r^2 - \frac{x^2}{4}$ und folglich $CE = \sqrt{\left(r^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$. Daher wird nun $DE = r - \sqrt{\left(r^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$ und somit $DE^2 = r^2 - 2r\sqrt{\left(r^2 - \frac{x^2}{4}\right)} + r^2 - \frac{x^2}{4}$ oder $DE^2 = 2r^2 - \frac{x^2}{4} - 2r\sqrt{\left(r^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$. Nun war $BE^2 = \frac{x^2}{4}$, folglich wird auch $BD^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{\left(r^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$. Da aber nach dem Vorhergehenden (§. 7.) $BD = \sqrt{\left(\frac{5r^2}{4}\right)} - \frac{r}{2}$ war, so wird nun $BD^2 = \frac{5r^2}{4} - 2\sqrt{\left(\frac{5r^2}{4}\right)} \times \frac{r}{2} + \frac{r^2}{4}$, oder auch $BD^2 = \frac{6r^2}{4} - r\sqrt{\frac{5r^2}{4}}$. Beide Werthe einander gleichgestellt, gibt $2r^2 - 2r\sqrt{\left(r^2 - \frac{x^2}{4}\right)} = \frac{6r^2}{4} - r\sqrt{\frac{5r^2}{4}}$, daher $\frac{r^2}{2} + r\sqrt{\frac{5r^2}{4}} = 2r\sqrt{\left(r^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$ und auch $\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{5r^2}{4}} = 2\sqrt{\left(r^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$, folglich $\frac{r}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5r^2}{4}} = \sqrt{\left(r^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$. Auf beiden Seiten zum Quadrate erhoben, gibt $\frac{r^2}{16} + \frac{2r}{4} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5r^2}{4}} + \frac{1}{4} \times \frac{5r^2}{4} = r^2 - \frac{x^2}{4}$. Alles mit 4 multiplicirt, gibt nun $\frac{r^2}{4} + 2r \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5r^2}{4}} + \frac{5r^2}{4} = 4r^2 - x^2$

daher $x^2 = 4r^2 - \frac{6r^2}{4} - r\sqrt{\frac{5r^2}{4}}$, oder auch $x^2 = \frac{10r^2}{4} - r\sqrt{\frac{5r^2}{4}} = \frac{5r^2}{2} - r\sqrt{\frac{5r^2}{4}}$.

Da nun $r\sqrt{\frac{5r^2}{4}} = \frac{r^2}{2}\sqrt{5}$ ist, so wird $x^2 = \frac{5r^2}{2} - \frac{r^2}{2}\sqrt{5} = \frac{5r^2 - r^2\sqrt{5}}{2} = \frac{r^2}{2} \times (5 - \sqrt{5})$ oder $x^2 = \frac{r^2}{2} \times 5 - 2{,}2360680 = \frac{r^2}{2} \times 2{,}7639320$ $= r^2 \times 1{,}3819660$ und endlich $x = r \times \sqrt{1{,}3819660}$ $= r \times 1{,}175 \ldots$

III. Beispiele. 1) Es sei $r = 1'$, so wird die zu findende Seite des Fünfecks $= 1'\ 1''\ 7'''\ 5''''$.

2) Wäre $r = 10'$, so würde $x = 10 \times 1{,}175 \ldots$ $= 11{,}75 = 11'\ 7''\ 5'''$.

3) $r = 5$ gibt $x = 5 \times 1{,}175 \ldots = 5{,}875 =$ $5'\ 8''\ 7'''\ 5''''$.

IV. Die geometrische Construction des Werthes von x beruht auf Folgendem. Es ist $CD^2 = r^2$ und ferner war $DB^2 = \frac{6}{4}r^2 - r\sqrt{\frac{5r^2}{4}}$, und endlich $AB^2 = x^2$. Allein man hatte auch $x^2 = \frac{10r^2}{4} - r\sqrt{\frac{5r^2}{4}} = r^2 + \frac{6}{4}r^2 - r\sqrt{\frac{5r^2}{4}}$; folglich ist $AB^2 = CD^2 + DB$, d. h. das Quadrat der Seite des regelmäßigen Fünfecks im Kreise wird gefunden, wenn man zum Quadrate seines Halbmesser das Quadrat des regelmäßigen Zehnecks in eben diesem Kreise addirt. Wird daher der Halbmesser und die Seite des Zehnecks an ihren Endpuncten rechtwinkelig zu-

sammengesetzt und die Hypotenuse gezogen, so ist diese die zu findende Seite des Fünfecks.

§. 9.

Neunte Aufgabe.

I. In einem rechtwinkeligen Dreiecke ist die Summe der beiden Catheten und das aus dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gezogene Loth gegeben. Man soll die Größe seiner drei Seiten finden.

In dem rechtwinkeligen Dreiecke (Fig. 97.) ABC ist AB + BC und das Loth BD gegeben. Man soll AB, BC und AC finden.

II. Es sei $AB + BC = a$, $BD = b$, $AB - BC = y$ und $AC = x$, so ist $AB = \frac{1}{2}(a + y)$ und $BC = \frac{1}{2}(a - y)$; folglich $x^2 = \frac{1}{4}(a^2 + 2ay + y^2) + \frac{1}{4}(a^2 - 2ay + y^2) = \frac{1}{2}(a^2 + y^2)$ und $2x^2 = a^2 + y^2$, woraus $y^2 = 2x^2 - a^2$ wird.

Nun ist aber auch $BA : BD = AC : BC$, oder $\frac{1}{2}(a + y) : b = x : \frac{1}{2}(a - y)$; daher $\frac{1}{4}(a^2 - y^2) = bx$ und auch $a^2 - y^2 = 4bx$, folglich $y^2 = a^2 - 4bx$. Da aber auch $y^2 = 2x^2 - a^2$ war, so ist nun $2x^2 - a^2 = a^2 - 4bx$ und $2x^2 + 4bx = 2a^2$ oder $x^2 + 2bx = a^2$, folglich $x^2 + 2bx + b^2 = a^2 + b^2$ und $x + b = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ daher endlich $x = \sqrt{a^2 + b^2)} - b$.

III. Beispiele. 1) Es sei $a = 10$ und $b = 3$, so wird $x = \sqrt{(109)} - 3 = 10{,}4403065 - 3 = 7{,}4403065$.

2) Für $a = 7$ und $b = \frac{12}{5}$ wird $x = \sqrt{\left(49 + \frac{144}{25}\right)}$

$$-\frac{12}{5} = \sqrt{\left(\frac{1369}{25}\right)} - \frac{12}{5} = \frac{37}{5} - \frac{12}{5} - \frac{25}{5} = 5.$$

Dieses muß so seyn, da hier die kleinere Cathete $= 3$, die größere $= 4$ und somit die Hypotenuse $= 5$ ist.

IV. Dieser Werth von x wird folgendergestalt construirt. Man errichte aus A (Fig. 97, b) auf $AB = a$, ein Loth $AC = b$ und ziehe CB, so ist diese $CB = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Wird nun diese CA von C nach D getragen so ist $DB = \sqrt{(a^2 + b^2)} - b$. Nimmt man daher $BE = BD$, so wird BE die Hypotenuse des zu bildenden Dreiecks seyn. Wird nun über EB ein Halbkreis beschrieben, durch C die CF mit AB gleichlaufend und endlich jede der Verbindungslinie EF und BF gezogen, so ist EFB das zu construirende rechtwinkelige Dreieck.

§. 10.

Zehnte Aufgabe.

I. Aus der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks und dem Unterschiede seiner Catheten diese Catheten selbst zu finden.

Für das Dreieck BAC (Fig. 98.) sei die Hypotenuse BC und $DC = AC - AB$ gegeben. Man soll dieses Dreieck hieraus bilden.

II. Es sei $BC = a$, $DC = b$, $\frac{1}{2}(AB + AC) = x$, so ist $AC = x + \frac{1}{2}b$, $AB = x - \frac{1}{2}b$ und folglich $(x + \frac{1}{2}b)^2 + (x - \frac{1}{2}b)^2 = a^2$, oder auch, wenn diese Werthe entwickelt und reducirt werden,

$$2x^2 + \tfrac{1}{2}b^2 = a^2, \text{ daher } x^2 = \frac{a^2 - \frac{1}{2}b^2}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{1}{4}b^2 \text{ und endlich } x = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - \frac{b^2}{4}\right)}.$$

III. Beispiel. Es sei $a = 10$ und $b = 3$, so wird $x = \sqrt{\left(\frac{100}{2} - \frac{9}{4}\right)} = \sqrt{\left(50 - 2\frac{1}{4}\right)} = \sqrt{47\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{191}{4}} = \frac{\sqrt{191}}{2} = \frac{13,8202749}{2} =$ 6,9101374. Daher ist nun $6,9101374 + \frac{3}{2} = AC = 6,9101374 + 1,5 = 8,4101374$ und $AC = 6,9101374 - 1,5 = 5,4101374$.

IV. Wenn $\frac{b^2}{4}$ größer als $\frac{a^2}{2}$ ist, so wird $\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ eine negative Größe und der Werth von x unmöglich.

V. Die Construction des Werthes $x = \sqrt{\left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{4}\right)}$ beruhet auf Folgendem. Man beschreibe ein rechtwinkeliges Dreieck AFE, worin $AF = FE = \frac{a}{2}$ ist, so wird $AE = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$. Wird nun über AE ein Halbkreis beschrieben, welcher durch F gehen muß, und die $EG = \frac{b}{2}$ gemacht, auch AG gezogen, so ist $AG^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ folglich $AG = \sqrt{\left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{4}\right)}$. Macht man nun $GD = GC = GE$, so ist AC die größere und $AB = AD$ die kleinere Cathete des rechtwinkeligen Dreiecks.

§. 11.

Uebungs-Fragen.

Wenn eine gegebene gerade Linie in einem Puncte willkührlich getheilt ist, so soll die Wahrheit folgender Sätze (geometrisch und algebraisch) bewiesen werden:

I. Die Rechtecke aus jedem ihrer beiden Abschnitte und aus einer gegebenen geraden Linie sind zusammengenommen dem Rechtecke aus der ganzen und aus dieser gegebenen Linie gleich.

II. Die Rechtecke aus der ganzen Linie und jedem ihrer Abschnitte zusammen sind dem Quadrate der ganzen gleich.

III. Das Rechteck aus der ganzen Linie und aus einem ihrer Abschnitte ist dem Quadrate dieses Abschnittes und dem Rechtecke aus den beiden Abschnitten zusammen gleich.

IV. Das vierfache Rechteck aus der ganzen Linie und aus einem ihrer Abschnitte, nebst dem Quadrate des andern Abschnittes ist dem Quadrate der aus der ganzen und dem erstern Abschnitte bestehenden geraden Linie gleich.

V. Das Rechteck aus der ganzen Linie und aus einer andern, ebenfalls in einem willkührlichen Puncte getheilten geraden ist den vier Rechtecken zusammen gleich, welche jeder Theil der einen mit jedem Theile der andern einschließet.

VI. Das Rechteck aus der ganzen Linie und aus irgend einer andern, ebenfalls in einem beliebigen Puncte getheilten geraden Linie, nebst dem Rechtecke aus zweien von den Theilen beider ist den Rechtecken, welche jeder der beiden ganzen mit dem genannten Theile der andern einschließet nebst dem Rechtecke aus ihren übrigen Theilen gleich.

VII. Das Quadrat der ganzen Linie ist den Quadraten der Theile und dem doppelten Rechtecke aus den Theilen zusammen gleich

VIII. Das Quadrat der ganzen Linie ist gleich dem Quadrate des einen Theils sammt dem Rechtecke, welches die ganze Linie und der genannte Theil als eine Linie, mit dem andern Theile einschließet.

IX. Das Quadrat der ganzen Linie und jenes des einen Abschnittes zusammen sind dem doppelten Rechtecke aus diesem Abschnitte und der ganzen, nebst dem Quadrate des andern Abschnittes gleich.

X. Das Quadrat des einen Abschnittes und das Rechteck aus der ganzen Linie und dem andern Abschnitte sind zusam-

men dem Quadrate des andern Abschnittes und dem Rechtecke aus der ganzen Linie und dem ersten Abschnitte gleich.

XI. Das Rechteck aus der ganzen Linie und dem Unterschiede ihrer Theile nebst dem Quadrate des kleinern Theils ist dem Quadrate des größern Theiles gleich.

XII. Die Quadrate der Theile sind zusammen dem Quadrate des Unterschiedes der Theile und dem doppelten Rechtecke aus diesen Theilen gleich.

XIII. Das Quadrat des Unterschieds der Theile ist gleich dem Quadrate der ganzen weniger dem vierfachen Rechtecke aus den Theilen.

XIV. Die Quadrate der ganzen und des Unterschieds der Theile zusammen sind das Doppelte der Quadrate der Theile.

II. Lehrübung.

Algebraische Entwickelung von Flächen-Verhältnissen.

§. 1.

Erste Aufgabe.

I. Man soll in der Cathete eines rechtwinkeligen Dreiecks einen Punct finden, damit das Quadrat des aus ihm bis zur Hypotenuse verlängerten Lothes dem Rechtecke aus den beiden Segmenten dieser Cathete gleich ist.

In der Cathete AB (Fig. 99. a.) des rechtwinkeligen Dreiecks BAC soll der Punct D gefunden werden, welcher $DE^2 = AD \times DB$ gibt.

II. Es sei $AB = a$, $AC = b$, $BD = x$, so ist $DA = a - x$ und es wird $DB \times DA = x(a - x) = ax - x^2$. Da nun die Dreiecke CAB und EDB einander ähnlich sind, so ist $BA : AC = BD : DE$,

oder $a : b = x : \frac{bx}{a}$; folglich ist $DE^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$ und es ist nach der Bedingniß der Aufgabe:

$\frac{b^2x^2}{a^2} = ax - x^2$; daher denn $b^2x^2 = a^3x - a^2x^2$ und auch $b^2x = a^3 - a^2x$ folglich $b^2x + a^2x = a^3$ d. h. $(b^2 + a^2)\, x = a^3$ und endlich $x = \frac{a^3}{a^2 + b^2}$.

III. Beispiele. 1) Für $AB = a = 5$ und $AC = b = 8$ wird $x = \frac{125}{25 + 64} = \frac{125}{89} = 1,40449\ldots$

2) Für $AB = a = 1$ und $AC = b = 2$ würde $x = \frac{1}{1 + 4} = \frac{1}{5}$.

IV. Um diesen Werth $x = \frac{a^3}{a^2 + b^2}$ zu construiren, bilde man aus ihm die Proportion:

$$a^2 + b^2 : a^2 = a : x.$$

Wird nun aus A ein Loth AE auf CB und von E ein solches auf AB, nämlich ED, gezogen, so ist D der in AB zu findende Punct. Denn da die Dreiecke CAB, AEB, AED und DEB einander ähnlich sind, so verhält sich

$AB : BE = BE : BD$, folglich ist
$BE^2 = AB \times BD$, allein
$AB^2 = AB \times AB$, daher auch
$AB^2 : BE^2 = AB : BD$. Nun ist ferner
$AB^2 : BE^2 = BC^2 : AB^2$, folglich
$BC^2 : AB^2 = AB : BD$ und
$BD = \frac{AB^3}{BC^2} = \frac{a^3}{a^2 + b^2}$, wie oben gefunden worden ist.

§. 2.

Zweite Aufgabe.

I. Es ist ein Dreieck gegeben und man soll dergestalt ein Quadrat in dasselbe construiren, daß es sich auf der einen Dreiecksseite befindet, und mit jedem seiner beiden andern Winkelpuncte jede der zwei übrigen Seiten des Dreiecks berührt.

Wenn ABC (Fig. 99, b.) das gegebene Dreieck ist, so soll ein Quadrat EKFD dergestalt in dasselbe verzeichnet werden, daß seine Seite EK in BC fällt, und seine Winkelpuncte D und F in der Seite AB und AC liegen.

II. Die Möglichkeit, das verlangte Quadrat in das gegebene Dreieck zu construiren, geht daraus hervor, daß in der Seite BA ein Punct D möglich ist, welcher die Lage hat, daß die auf BC lothrechte DE der mit BC gleichlaufenden DF gleich wird. Wird nun das Loth AH gezogen, so wird DF von demselben in M geschnitten.

Nun sei $BC = a$, $AH = h$, $AM = x$, so ist $MH = DE = FK = h - x$, und man hat, weil DF mit BC gleichlaufend ist,

$$BC : BA = DF : DA, \text{ also}$$
$$BC : DF = BA : DA, \text{ allein}$$
$$BA : DA = HA : MA, \text{ daher}$$
$$BC : DF = HA : MA, \text{ oder}$$
$$a : DF = h : x \text{ und}$$

$DF = \frac{ax}{h}$. Allein es ist auch

$DF = DE = MH = h - x$, also

$$\frac{ax}{h} = h - x \text{ und } ax = h^2 - hx$$

somit $ax + hx = h^2$ oder $(a + h)\,x = h^2$ und endlich $x = \frac{h^2}{a + h}$.

III. Beispiele. 1) Wenn $a = 3$, $h = 6$ ist, so wird $x = \frac{36}{9} = 4$.

2) Es sei $a = 10$, $h = 3$, so ist $x = \frac{9}{13} = 0{,}692307\ldots$

3) Wäre $a = 1$ und $h = 1$, so würde $x = \frac{1}{2} = 0{,}5$ seyn.

IV. Die geometrische Construction dieses Werthes für x beruht darauf, daß man in der Proportion $a + h : h = h : x$ zu den drei ersten Linien die vierte geometrische Proportionallinie sucht, welche $= x =$ AM ist.

Auch kann man aus A mit einem Radius AO = AH + BC einen Bogen beschreiben, welcher die verlängerte CB in O schneidet. Wird nun aus H auf AO das Loth HR gezogen, AR = AM gemacht, so ist M der in AH zu findende Punct. Denn da die Dreiecke ARH und AHO ähnlich sind, so ist

$AH : AR = AO : AH$, folglich

$AH^2 = AR \times AO$, nun ist aber

$AO^2 = AO \times AO$, somit auch

$AO^2 : AH^2 = AO : AR$ und

$$AR = \frac{AH^2 \times AO}{AO^2} = \frac{AH^2}{AO}.$$

Da nun $AH^2 = h^2$ und $AO = a + h$ ist, so ist auch nun $x = AR = AM = \frac{h^2}{a + h}$ wie zuvor.

§. 3.

Dritte Aufgabe.

I. Man soll in einen gegebenen Quadranten einen Kreis dergestalt beschreiben, daß derselbe sowohl dessen Bogen, als jeden Halbmesser in einem Puncte berührt.

In den Quadranten ABC (Fig. 100.) soll ein Kreis EFG so construirt werden, daß er den Quadranten in E, F und G berühret.

II. Es sei BC = BE = BA = a und ∡ CBE = ∡ ABE = ½ R, so ist klar, daß es in EB einen Punct D gebe, wodurch ED jedem der beiden Lothe DF und DG gleich ist. Setzt man nun DE = DF = DG = x, so ist $DB = \sqrt{(DF^2 + FB^2)} = \sqrt{2 DF^2} = \sqrt{2 x^2} = x\sqrt{2}$. Folglich ist nun BE = BD + DE $= x\sqrt{2} + x$ und man hat somit

$x\sqrt{2} + x = a$, daher ist

$x(\sqrt{2} + 1) = a$ und

$x = \frac{a}{\sqrt{2} + 1}$. Folglich wird auch

$$x = \frac{a \times (\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1) \times (\sqrt{2} - 1)} \text{ d. h.}$$

$$x = \frac{a \times (\sqrt{2} - 1)}{1} = a \times (\sqrt{2} - 1)$$

$$= a \times 1{,}4142136 - 1 = a \times 0{,}4142136.$$

III. Beispiele. 1) Es sei a = 1, so wird x = DE = DF = DG = 0,4142136. Da nun auch BG = BF = DG = DF ist, so dürfte man nur den gefundenen Werth von B nach G und nach F tragen, die Lothe GD und FD errichten, welche sich in D

schneiden und aus D mit DF = DG den zu findenden Kreis construiren.

2) Für a = 10 wird x = 10 × 4,142136.

3) Wäre $a = \frac{1}{2}$, so würde x = 0,2071068 u. s. w.

IV. Aus der Formel $x = a \times (\sqrt{2} - 1)$ findet man auch $x = a\sqrt{2} - a = \sqrt{(2a^2)} - a$. Um diesen Werth zu construiren, halbire man den rechten Winkel ABC durch die gerade BE, welche auch den Bogen AC in E halbirt und errichte in E auf EB das Loth EH, welches die verlängerte BA in H schneidet, so ist EH eine Tangente für den Punct E. Wird nun BG = AH gemacht und das Loth GD = GB errichtet, so ist D der Mittelpunct und DG der Radius des zu findenden Kreises.

Denn da ∠ EBH = $\frac{1}{2}$R und ∠ BEH = R ist, so muß auch ∠ H = $\frac{1}{2}$ R seyn. Daher ist BE = EH = a, und $BH = \sqrt{2BE^2} = \sqrt{2a^2}$, auch endlich, da AH = BH − BA ist, $AH = \sqrt{(2a^2)} - a$.

§. 4.

Vierte Aufgabe.

I. Man soll in der Cathete eines gegebenen rechtwinkeligen Dreiecks einen Punct finden, der die Lage hat, daß ein aus ihm auf dieselbe errichtetes bis zur Hypotenuse verlängertes Loth das Dreieck in zwei gleiche Theile theilet.

Wenn ABC (Fig. 101.) das gegebene rechtwinkelige Dreieck ist, so soll der Punct D gefunden werden, daß durch das Loth DE das Viereck ABDE dem Dreiecke EDC gleich ist.

II. Es sei $CB = a$, $BA = b$ und $CD = x$, so ist, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke CED und CAB,

$$CB : BA = CD : DE \text{ d. h.}$$

$$a : b = x : \frac{bx}{a}.$$

Folglich wird der Inhalt des Dreiecks $EDC = ED \times \frac{1}{2} DC = \frac{bx}{a} \times \frac{x}{2} = \frac{bx^2}{2a}$ und jener des Dreiecks $ABC = \frac{ab}{2}$. Daher entsteht nun die Gleichung

$$\frac{bx^2}{2a} = \frac{1}{2} \times \frac{ab}{2} = \frac{ab}{4}, \text{ folglich}$$

$$4\,bx^2 = 2\,a^2b \text{ und auch}$$

$$2\,bx^2 = a^2b, \text{ woraus}$$

$$x^2 = \frac{a^2b}{2b} = \frac{a^2}{2} \text{ und endlich}$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = a^2 \sqrt{\frac{1}{2}} = a^2 \sqrt{0{,}5} \text{ wird.}$$

III. Beispiele. 1) Es sei $a = 1$, so wird $x = \sqrt{0{,}5} = 0{,}70710678$.

2) Für $a = 10$ wird $x = 10 \sqrt{0{,}5} = 7{,}0710678$.

3) $a = \frac{1}{2}$ gibt $x = \frac{1}{2} \sqrt{0{,}5} = 0{,}35355339$.

IV. Um diesen Werth von $x = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$ zu construiren, werde BC in F halbirt, der Halbkreis BEGC gezogen, aus F das Loth FG errichtet und $CD = CG$ gemacht, so ist D der in CB gesuchte Punct. Denn da $BC = a$ ist, so muß $CG = CD = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$ seyn.

Da der Werth von x nur durch jenen von a bestimmt ist, so kann b jede beliebige Linie seyn. Da

in dem Ausdrucke $x = a^2 \sqrt{0{,}5}$ der Factor $\sqrt{0{,}5}$ eine Irrationalgröße ist, so wird es auch der Werth von x seyn.

§. 5.

Fünfte Aufgabe.

I. Jedes Dreieck durch ein, auf einer seiner Seiten errichtetes Loth in zwei gleiche Theile zu theilen.

Es sei ABC (Fig. 102.) das gegebene Dreieck, welches durch das auf BC errichtete Loth EF halbirt werden soll.

II. Wenn BA = AC wäre, so würde der zu findende Punct E in der Mitte von BC liegen. Fällt aber, wie hier, das von A auf BC gezogene Loth AD so, daß BD < DC ist, so muß der zu findende Punct zwischen D und C liegen, da nun offenbar das Dreieck ADB kleiner als das Dreiecke ADC ist.

Nun sei BC = a, AD = b, CD = c und CE = x, so ist wegen Aehnlichkeit der Dreiecke ADC und FEC,

$$CD : DA = CE : EF, \text{ oder}$$

$$c : b = x : \frac{bx}{c}.$$ Daher ist der Inhalt des Dreiecks FEC $= \frac{bx}{c} \times \frac{x}{2} = \frac{bx^2}{2c}$ und jener des Dreiecks ABC $= \frac{ab}{2}$. Folglich hat man die Gleichung $\frac{bx^2}{2c} = \frac{ab}{4}$ und daher $4bx^2 = 2abc$, oder $x^2 = \frac{2abc}{4b} = \frac{ac}{2}$ und endlich $x = \sqrt{\frac{ac}{2}}$.

III. Beispiele. 1) Es sei $a=9$, $c=8$, so wird $x = \sqrt{\frac{9 \times 8}{2}} = \sqrt{36} = 6 = CE$. Folglich ist EF (wenn man $AD = b = 10$ setzt) $= \frac{10 \times 6}{8} = \frac{60}{8} = \frac{15}{2}$ und der Inhalt des Dreiecks EFC $= \frac{15}{2} \times \frac{6}{2} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}$. Nun ist aber der Inhalt des Dreiecks $ABC = \frac{9 \times 10}{2} = 45$ dessen Hälfte $= 22\frac{1}{2}$ ist, wie gefodert wird.

2) Für $a=6$, $c=4$ wird $x = \sqrt{\frac{6 \times 4}{2}} = \sqrt{12} = 3{,}4641016\ \ldots$ Um die Probe zu machen muß für $AD = b$ ein willkührlicher Werth angenommen werden, nach welchem sodann jener von FE berechnet wird.

IV. Da aus $x^2 = \frac{ac}{2}$ die Proportion folgt: $\frac{a}{2} : x = x : c$, so beruhet die geometrische Construction von x darauf, daß man zwischen $\frac{a}{2}$ und c eine mittlere geometrische Proportionallinie sucht.

§. 6.

Sechste Aufgabe.

I. Wenn in einer Seite eines Dreiecks ein willkührlicher Punct gegeben ist, so soll durch diesen eine gerade Linie gezogen werden, welche das Dreieck halbirt.

Es sei ABC (Fig. 103.) das gegebene Dreieck und D der in BC gegebene Punct, so soll das Dreieck durch eine Linie aus ihm halbirt werden.

II. Wenn D in der Mitte von BC läge, so würde DA die zu findende Theilungslinie seyn. Ist aber $CD > BD$, so muß dieselbe die CA schneiden und z. B. DE seyn. Man ziehe die Lothe AF und EG und setze $BC = a$, $CD = b$, $AF = c$, $AC = d$ und $CE = x$, so ist, weil die Dreiecke AFE und EGC ähnlich sind, nunmehr

$$CA : AF = CE : EG, \text{ oder}$$

$$d : c = x : \frac{cx}{d}.$$ Daher ist der Inhalt des Dreiecks $DEC = \frac{cx}{d} \times \frac{b}{2} = \frac{bcx}{2d}$ und jener des Dreiecks $ABC = \frac{ac}{2}$. Daher entsteht nun die Gleichung $\frac{bcx}{2d} = \frac{ac}{4}$; folglich $4bcx = 2acd$ und $x = \frac{2acd}{4bc} = \frac{ad}{2b}$.

III. Beispiele. 1) Es sei $a = 12$, $b = 7$ und $d = 15$, so wird $x = \frac{12 \times 15}{14} = \frac{180}{14} = 13\tfrac{4}{7}$.

2) Für $a = 15$ und $b = 10$ und $d = 10$ wird $x = \frac{15 \times 10}{20} = \frac{150}{20} = 7\tfrac{1}{2}$. Die Probe über die Richtigkeit beider Werthe kann leicht gemacht werden.

IV. Um den Werth $x = \frac{ad}{2b}$ zu construiren, darf man nur zu $2b$, a und d die vierte geometrische Proportionallinie suchen, denn es ist $2b : a = d : x$.

V. Um durch die gerade DE irgend einen andern bestimmten Theil z. B. den $\frac{n}{m}$ Theil des Dreiecks BAC abzuschneiden, würde $\frac{bcx}{2d} = \frac{n}{m} \times \frac{ac}{2}$ seyn, und somit $\frac{bcx}{2d} = \frac{acn}{2m}$, daher $2bcmx = 2acdn$ und endlich $x = \frac{2acdn}{2bcm} = \frac{adn}{bm}$.

Um diesen Werth zu construiren, suche man zu m mal b, n mal a und zu d die vierte geometrische Proportionallinie; denn es ist $mb : na = d : x$.

§. 7.

Siebente Aufgabe.

I. Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks zu finden, dessen Fläche jener eines gegebenen Quadrates gleich ist.

Es sei DCBA (Fig. 104.) das gegebene Quadrat und GEF das zu findende gleichseitige Dreieck; so, daß DCBA = GEF ist.

II. Man setze AB = a und EF = x, und ziehe aus G auf EF das Loth GH, so ist für den Radius EG die GH der Sinus des Winkels E = 60°. Daher hat man EG : GH = r : sin. 60° oder x : GH = r : sin. 60° und $GH = \frac{x \times \sin. 60^\circ}{r}$. Da nun der Inhalt des Dreiecks GEF = GH $\times \frac{1}{2}$ EF ist, so wird derselbe auch $= \frac{x . \sin. 60^\circ}{r} \times \frac{x}{2} = \frac{x^2 . \sin. 60^\circ}{2r}$

und man hat, weil der Inhalt des Quadrats $= a^2$ ist, die Gleichung

$$\frac{x^2 . \sin. 60^\circ}{2r} = a^2, \text{ folglich auch}$$

$$x^2 . \sin. 60^\circ = 2ra^2, \text{ somit}$$

$$x^2 = \frac{2ra^2}{\sin. 60^\circ} \text{ und endlich}$$

$$x = \sqrt{\frac{2ra^2}{\sin. 60^\circ}} = a\sqrt{\frac{2r}{\sin. 60^\circ}}$$

Am Bequemsten wird der Werth von x durch Logarithmen berechnet. Hier ist Log. $x = \frac{1}{2}$ Log. $2 + \frac{1}{2}$ Log. r + Log. a — $\frac{1}{2}$ Log. sin. 60°.

III. Beispiel. Es sei $a = 15'$, so wird die Rechnung diese:

½ Log. 2 =	0,1505150
½ Log. r =	5,0000000
Log. 15 =	1,1760913
	6,3266063
½ Log. sin. 60° =	4,9687653
Log. x =	1,3578410.

Da hierzu die Zahl 22,795 gehört, so ist x = EF = 22′ 7″ 9‴ 5⁗.

IV. Setzte man $r = 1$, so würde $x^2 = \frac{2a^2}{\sin. 60^\circ} = \frac{2}{\sin. 60} \times a^2$ und man hätte hier $x = a \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin. 60^\circ}}$, folglich $x\sqrt{\sin. 60^\circ} = a \times \sqrt{2}$ und $\sqrt{\sin. 60^\circ} : \sqrt{2} = a : x$. Allein für $r = 1$ wird $\sqrt{\sin. 60^\circ} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Folglich ist auch $\frac{\sqrt{3}}{2} : \sqrt{2} = a : x$ oder $\sqrt{3} : \sqrt{2} = 2a : x$.

Da nun sowohl $\sqrt{3}$ als $\sqrt{2}$ durch Construction gefunden werden kann, (indem die Hypotenuse eines gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreiecks, wenn die Cathete $= 1$ ist, den Werth von $\sqrt{2}$, und die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen eine Cathete $= \sqrt{2}$ und dessen andere $= 1$ ist, den Werth $\sqrt{3}$ darstellt) so kann hierdurch auch der Werth von x durch bloße Construction gefunden werden.

§. 8.

Achte Aufgabe.

I. Aus der Grundlinie und aus jedem der an ihr liegenden Winkel den Inhalt des Dreiecks zu berechnen.

Es sei in dem Dreiecke ACB (Fig. 105.) die Grundlinie AB, der Winkel A und der Winkel B gegeben, Man soll dessen Fläche $= F$ bestimmen.

II. Man ziehe $\sphericalangle A + \sphericalangle B$ von $180°$ ab, so ist die Differenz $= \sphericalangle ACB$, und man hat, wenn $\sphericalangle A = o$, $\sphericalangle B = u$, $\sphericalangle ACB = v$ und $AB = a$ gesetzt wird, $\sin. c : \sin. u = a : AC$, daher $AC = \frac{a . \sin. u}{\sin. c}$.

Wird nun das Loth CD gezogen, so ist, wegen $r : \sin. o = AC : CD$, nunmehr $CD = \frac{a . \sin. u . \sin. o}{r . \sin. c}$.

Da aber des Dreiecks Inhalt $= \frac{1}{2} AB \times CD$ ist, so wird derselbe nun $= F = \frac{a^2 . \sin. u . \sin. o}{2 r \sin. . c}$.

III. Es sei $a = 24'$, $\sphericalangle o = 35° 40'$, $\sphericalangle u = 52° 18'$, so ist $\sphericalangle c = 92° 2'$ und

Log. $F = 2$ Log. $a +$ Log. $\sin. u +$ Log. $\sin. o$ —
Log. $2r$ — Log. $\sin. c$.

Dieses gibt folgende Rechnung

$$
\begin{array}{rl}
2\ \text{Log}.\ 24 = & 2{,}7604224 \\
\text{Log. sin. } 52^\circ\ 18' = & 9{,}8982992 \\
\text{Log. sin. } 35^\circ\ 40' = & \underline{9{,}7657197} \\
 & 22{,}4244413 \\
\text{Log. } 2r = & \underline{10{,}3010300} \\
 & 12{,}1234113 \\
\text{Log. sin. } 92^\circ\ 2' = & \underline{9{,}9997265} \\
\text{Log. } F = & 2{,}1236848.
\end{array}
$$

Da hierzu die Zahl 132,94 gehört, so ist die Fläche des Dreiecks ACB = 132q′ 94″.

§. 9.

Neunte Aufgabe.

I. In einem Trapeze sind die drei Winkel und zwei gegenüberliegende Seiten gegeben. Man soll hieraus seinen Flächeninhalt berechnen.

Es sei in dem Trapeze CDAB (Fig. 106.) der Winkel A, B und C nebst der Seite CD und BA bekannt und man soll den Flächen-Inhalt dieses Vierecks berechnen.

II. Es sei ∡ A = m, ∡ B = n, ∡ C = o, BA = a und CD = b. Des Vierecks Fläche heiße F. Man verlängere die Seiten BC und AD bis sie sich in E schneiden, so entstehen die zwei Dreiecke EBA und ECD, und es ist F = △ EBA — △ ECD.

Da nun die vier Winkel des Vierecks CDAB zusammen = 4R sind, so ist ∡ CDA = v ebenfalls bekannt und somit auch ∡ CDE = y und ∡ DCE = x.

Es ist aber (nach §. 8.) $\triangle EBA = \frac{a^2 . \sin. n . \sin. m}{2r . \sin. E}$

und $\triangle$ ECD $= \frac{b^2 . \sin. x . \sin. y}{2r . \sin. E}$, folglich F =

CDAB $= \frac{a^2 . \sin. n . \sin. m - b^2 . \sin. x . \sin. y}{2r . \sin. E}$

III. Beispiel. Am Bequemsten wird der zu findende Werth wieder durch Logarithmen berechnet. Hier ist nämlich

Log. $\triangle$ EBA = 2 Log. a + Log. sin. n + Log. sin. m.
— Log. 2r — Log. sin. E, und

Log. $\triangle$ ECD = 2 Log. b + Log. sin. x + Log. sin. y
— Log. 2r — Log. sin. E.

Nun sei a = 35′, $\sphericalangle$ n = 74° 15′, $\sphericalangle$ m = 80° 24′; b = 24′, $\sphericalangle$ o = 98° 10′, so ist $\sphericalangle$ v = 360° — (74° 15 + 80° 24′ + 98° 10′) = 360° — 252° 49′ = 107° 11′, ferner $\sphericalangle$ x = 180° — 98° 10′ = 81° 50′ $\sphericalangle$ y = 180° — 107° 11′ = 72° 49′, woraus denn $\sphericalangle$ E = 180° — (81° 50′ + 72° 49′) = 180° — 154° 39′ = 25° 21′ folgt.

Hier ist

2 Log. 35 =	3,0881360
Log. sin. 74° 15′ =	9,9833805
Log. sin. 80° 24′ =	9,9938752
	23,0653917
Log. 2 r =	10,3010300
	12,7643617
Log. sin. 25° 21′ =	9,6315926
Log. $\triangle$ EBA =	3,1327691

Da hierzu die Zahl 1357,591 gehört, so ist $\triangle$ EBA = 13□° 57′ 59″ 1‴.

Ferner ist nun

$$
\begin{aligned}
2\ \text{Log.}\ 24 &= 2{,}7604224 \\
\text{Log. sin.}\ 81^\circ\ 50' &= 9{,}9955734 \\
\text{Log. sin.}\ 72^\circ\ 49' &= \underline{9{,}9801690} \\
 & \ 22{,}7361648 \\
\text{Log.}\ 2r &= \underline{10{,}3010300} \\
 & \ 12{,}4351348 \\
\text{Log. sin.}\ 25^\circ\ 21' &= \underline{9{,}6315926} \\
\text{Log.}\ \triangle\ ECD &= 2{,}8035422
\end{aligned}
$$

Da diesem Logarithmus die Zahl 636,1245 gehört, so ist $\triangle$ ECD = 6qo 36′ 12″ 45‴ und daher Viereck CDAB = 13qo 57′ 59″ 1‴ — 6qo 36′ 12″ 45‴ = 7qo 21′ 46″ 56‴.

§. 10.

Zehnte Aufgabe.

I. Aus drei Seiten eines Vierecks und den beiden von ihnen eingeschlossenen Winkel den Inhalt desselben zu berechnen.

In dem Vierecke CDAB (Fig. 106.) sind die drei Seiten CB, BA und AD, nebst den zwei Winkeln B und A gegeben. Hieraus soll sein Inhalt berechnet werden.

II. Es sei CB = a, BA = b, AD = c, $\measuredangle$ B = n, $\measuredangle$ A = m und die verlängerten Seiten BC und AD treffen in E zusammen, so ist sin. E : sin. m = b : BE, folglich BE $= \frac{b \,.\, \sin.\, m}{\sin.\, E}$; allein es ist sin. E = sin. (m + n), daher wird BE $= \frac{b \,.\, \sin.\, m}{\sin.\, (m + n)}$. Ferner hat man auch sin. E : sin. n

$= b : AE$, daher $AE = \frac{b . \sin. n}{\sin. E}$ und somit $AE = \frac{b . \sin. n}{\sin. (m + n)}$.

Auch ist $\triangle ABE = \frac{b^2 . \sin. m . \sin. n}{2 \sin. (m + n)}$. Daher wird nun $CE = BE - BC = \frac{b . \sin. m}{\sin. (m + n)} - a$ und $DE = AE - AD = \frac{b . \sin. n}{\sin. (m + n)} - c$. Folglich wird $\triangle CDE = \frac{1}{2}\left(\frac{b . \sin. m}{\sin. (m + n)} - a\right) . \left(\frac{b . \sin. n}{\sin. (m + n)}\right) . \sin. (m + n)$ und man hat $ABCD = ABE - CDE = \frac{b^2 . \sin. m . \sin. n}{2 \sin. (m + n)} - \frac{1}{2}\left(\frac{b . \sin. m}{\sin. (m + n)} - a\right) . \left(\frac{b . \sin. n}{\sin. (m+n)} - c\right) . \sin (m+n) = \frac{b^2 . \sin. m . \sin. n}{2 \sin. (m + n)} - \frac{1}{2}\left(\frac{b^2 . \sin. m . \sin. n}{\sin. (m + n)^2} - \frac{bc \sin. m}{\sin. (m+n)} - \frac{ab \sin. n}{\sin. (m+n)} + ac\right) \sin. (m + n) = \frac{b^2 . \sin. m . \sin. n}{2 \sin. (m + n)} - \frac{1}{2}\left(\frac{b^2 . \sin. m . \sin. n}{\sin. (m + n)} - bc . \sin. m - ab \sin. n + ac . \sin. (m + n)\right) = \frac{b^2 . \sin. m . \sin. n}{2 \sin. (m + n)} - \frac{b^2 . \sin. m . \sin. n}{2 \sin. (m + n)} + \frac{bc . \sin. m + ab . \sin. n - ac . \sin. (m + n)}{2}$

$= \frac{1}{2} \left(bc . \sin. m + ab . \sin. n - ac . \sin. (m + n)\right)$.

Wenn $\measuredangle (m + n) = 180°$ ist, so muß BC mit AD gleichlaufend, $\sin. (m + n) = 0$ und $\sin. m = \sin. n$ seyn. Daher wird nunmehr $ABCD = \frac{1}{2} (bc + ab) . \sin. m = \frac{1}{2} b (c + a) . \sin. m$.

III. Vorstehende Aufgabe kann auch durch Hülfe einer andern aufgelöset werden, welche aus zwei Seiten eines Dreiecks nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel seinen Inhalt finden lehrt. Denn wenn man sich die Querlinie BD denket, so kann aus BA, AD und ∢ A die Fläche des Dreiecks BDA berechnet, so wie auch die Größe von BD und ∢ ABD bestimmt werden. Hierdurch wird nun noch durch Beihülfe von CB und ∢ CBD der Inhalt des Dreiecks CBD gefunden. Die Summe beider Dreiecke bildet das Viereck CDAB.

Um aber in einem Dreiecke, wie ABC (Fig. 107.) aus $AB = a$, $AC = b$ und ∢ $A = o$ seinen Inhalt $= F$ zu finden, denke man sich das Loth BD, so ist für AB als Halbmesser und $r = 1$ die $BD = a \cdot \sin. o$. Folglich wird $F = \frac{AC \times BD}{2} = \frac{ab \quad \sin. o}{2}$, oder, bequemer durch Logarithmen, Log. $F =$ Log. a + Log. b + Log. $\sin. o$ — Log. 2.

Beispiele sind nach diesen Formeln leicht zu berechnen.

§. 11.

Uebungs-Fragen.

I. Ein Dreieck aus einem in einer Seite gegebenen Puncte nach dem Verhältnisse $m:n$ zu theilen.

II. Ein Dreieck durch eine Linie, welche einer seiner Seiten parallel ist, nach dem Verhältnisse $m:n$ zu theilen.

III. Von einem Paralleltrapeze durch eine, den Parallelseiten gleichlaufende Linie einen bestimmten Theil abzuschneiden.

IV. Ein Paralleltrapez durch einen, auf einer der Parallelseiten gegebenen Punct nach dem Verhältnisse $m:n$ zu theilen.

V. Jedes Trapez durch einen in einer Seite gegebenen Punct nach dem Verhältnisse m:n zu theilen.

VI. Aus den drei Seiten und den von ihnen eingeschlossnen zwei Winkeln eines Vierecks dessen Fläche trigonometrisch zu finden.

VII. Aus den vier Seiten und den drei eingeschlossenen Winkeln eines Fünfecks dessen Flächeninhalt ebenso zu berechnen.

VIII. In ein gegebenes Viereck ein Quadrat zu construiren.

IX. In ein gegebenes Dreieck ein kleineres, ebenfalls gegebenes Dreieck so zu construiren, daß jeder Winkelpunct des letztern eine Seite des erstern berührt.

III. Lehrübung.

Algebraische Entwickelung von Körper-Verhältnissen.

§. 1.

Erste Aufgabe.

I. Die Seite eines Tetraëders zu finden, welches in eine Kugel von gegebenem Durchmesser beschrieben werden kann.

Es sei AB (Fig. 108.) der Durchmesser der gegebenen Kugel und AD die Seite des in sie zu beschreibenden Tetraëders.

II. Setzt man AB = a, AD = x, so ist der Halbmesser jenes Kreises, in welchen eines der Seitendreiecke des Tetraëders construirt werden kann, $= \sqrt{\frac{x^2}{3}}$. Nun sei AC = y, so ist CB = a — y und man hat AC : CD = CD : CB, oder

$y : \sqrt{\frac{x^2}{3}} = \sqrt{\frac{x^2}{3}} : a - y$ folglich $ay - y^2 = \frac{x^3}{3}$

Allein es ist auch $AD^2 = AC^2 + CD^2$, oder $x^2 = y^2 + \frac{x^2}{3}$ und $y^2 = \frac{2x^2}{3}$; daher wird nun auch $ay - \frac{2x^2}{3} = \frac{x^2}{3}$ und somit $ay = x^2$ folglich, weil $y = \sqrt{\frac{2x^2}{3}}$, $a\sqrt{\frac{2x^2}{3}} = x^2$ und demnach $a^2 \frac{2x^2}{3} = x^4 = \frac{2}{3} a^2 x^2$, also $\frac{2}{3} a^2 = x^2$ und endlich $x = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

III. Da aus $\frac{2}{3} a^2 = x^2$ die Proportion $3 : 2 = a^2 : x^2$ folget, so ist der allgemeine Satz bewiesen: Das Quadrat des Durchmessers einer gegebenen Kugel verhält sich zum Quadrate der Seite des ihr eingeschriebenen Tetraëders wie 3 : 2.

Da auch $a : x = \sqrt{3} : \sqrt{2}$ ist, so verhält sich der Durchmesser der Kugel zur Seite des in sie beschriebenen Tetraëders wie $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ d. h. diese Linien stehen in einem arithmetischen Irrationalverhältnisse.

Da aber sowohl $\sqrt{3}$ als $\sqrt{2}$ durch Linien dargestellt werden kann, so läßt sich auch zu den drei Größen: $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ und a die vierte Proportionallinie finden, welche der Seite des zu bestimmenden Tetraëders gleich ist.

Weil auch $y^2 = \frac{2x^2}{3} = \frac{2ay}{3}$ ist, so wird $y = \frac{2}{3} a$ und es kann hierdurch ebenfalls sowohl AC als die zu findende Seite AD construirt werden.

IV. Um den körperlichen Inhalt des Tetraëders zu berechnen, denke man sich von dessen Spitze ein

Loth auf die Grundfläche, welches in ihrer Mitte eintrifft. Wird aus derselben eine gerade Linie nach einem Scheitelpuncte der Grundfläche gezogen, so entsteht in dem Tetraëder ein rechtwinkeliges Dreieck, worin die Größe jenes Lothes berechnet werden kann. Wird nun das Maß dieses Lothes mit der, aus einer Seite des Tetraëders zu berechnenden Grundfläche multiplicirt, so ist der dritte Theil dieses Products der körperliche Inhalt des Tetraëders. Die Entwickelung dieser Formel ist eine lehrreiche Uebung für Anfänger.

V. Wenn man den Durchmesser der Kugel $= 2r$ setzt, so findet man folgende Werthe:

a) die Seite des Tetraëders wird $= 2r\sqrt{\tfrac{2}{3}} = r \times 1{,}632993\ldots$

b) den Inhalt jeder seiner vier Grenzflächen $= \dfrac{2r^2}{\sqrt{3}} = r^2 \times 1{,}154701\ldots$

c) Halbmesser des ihr umschriebenen Kreises $= \dfrac{2r\sqrt{2}}{3} = r \times 0{,}942809\ldots$

d) Gesammtfläche des Tetraëders $= \dfrac{8r^2}{\sqrt{3}} = r^2 \times 4{,}618804\ldots$

e) Körper-Inhalt des Tetraëders $= \dfrac{8r^3}{9\sqrt{3}} = r^3 \times 0{,}513200\ldots$

§. 2.

Zweite Aufgabe.

I. Die Seite des Würfels zu finden, welcher in eine gegebene Kugel beschrieben werden kann.

Es sei FH (Fig. 109.) Durchmesser jener Kugel, in welche der Würfel construirt werden soll, so ist klar, daß derselbe auch die Diagonallinie des Würfels seyn muß.

II. Es sei FH = a, die zu findende Seite des Würfels = x, so ist $FI^2 = 2x^2$, $FH^2 = 3x^2$ und man hat die Gleichung $3x^2 = a^2$, folglich $x^2 = \frac{a^2}{3}$ und $x = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = a \sqrt{3}$.

III. Aus $3x^2 = a^2$ folgt die Proportion $3 : 1 = a^2 : x^2$ d. h. das Quadrat des Durchmessers verhält sich zum Quadrate des in die Kugel zu construirenden Würfels wie 3 : 1.

Da auch $a : x = \sqrt{3} : 1$, so ist das Verhältniß beider Linien ein arithmetisches Irrationalverhältniß.

Weil aber das Verhältniß $\sqrt{3} : 1$ in Linien dargestellt werden kann, so wird auch x gefunden, wenn man zu $\sqrt{3}$, 1 und a die vierte Proportionallinie sucht.

Da aus $3x^2 = a^2$ auch noch die Proportion folgt: $\frac{a}{3} : x = x : a$, so wird x durch Construction gefunden, wenn man zwischen $\frac{a}{3}$ und a eine mittlere geometrische Proportionallinie sucht.

IV. Für den Cubus findet man folgende Werthe:

a) die Seitenlinie des Würfels ist $= \frac{2r}{\sqrt{3}} = r \times 1{,}154700\ldots$

b) Inhalt seiner einen Seitenfläche $= \frac{4r^2}{3} = r^2 \times 1{,}333333\ldots$

c) Halbmesser des ihr umschriebenen Kreises = $\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = r \times 0{,}816496\ldots$

d) Gesammtfläche des Würfels = $8\,r^2 = r^2 \times 8{,}000000$

e) Körperlicher Inhalt des Würfels = $\frac{8\,r^3}{3\sqrt{3}} = r^3 \times 1{,}539600\ldots$

§. 3.

Dritte Aufgabe.

I. Die Seite eines Octaëders zu finden, welches in eine Kugel von gegebenem Durchmesser beschrieben werden kann.

Es sei HL (Fig 110.) Durchmesser der Kugel, so soll ML als Seite des Octaëders gefunden werden.

II. Man setze HL = a, LM = x, so ist, weil ∡ MNL = R, $x^2 = \frac{1}{2}a^2$ und folglich $x = \sqrt{\frac{1}{2}a^2} = a\sqrt{\frac{1}{2}} = a\sqrt{0{,}5}$.

III. Der Ausdruck $x^2 = \frac{a^2}{2}$ gibt die Proportion $a^2 : x^2 = 2 : 1$ folglich verhält sich das Quadrat des Durchmessers zum Quadrate der Seite des Octaëders wie 2 : 1.

Auch ist $a : x = \sqrt{2} : 1$, oder der Durchmesser verhält sich zur Seite des Octaëders wie $\sqrt{2} : 1$ und bildet somit ein arithmetisches Irrationalverhältniß.

Da auch $\frac{a}{2} : x = x : a$ ist, so wird die Seite des Octaëders gefunden, wenn man zu dem halben und ganzen Durchmesser eine mittlere geometrische Proportionallinie sucht.

IV. Die Berechnung des Inhaltes dieses Körpers beruhet darauf, daß derselbe als die Summe zweier congruenten senkrechten Pyramiden betrachtet wird, deren Grundflächen Quadrate sind. Das Loth von der Spitze einer solchen Pyramide auf ihre Grundfläche fällt in ihre Mitte und wenn man aus derselben nach einem ihrer Winkelpuncte eine gerade Linie zieht, so entsteht in dieser Pyramide ein rechtwinkeliges Dreieck, worin man jenes Loth leicht berechnen und durch dessen Maaß den Inhalt der Pyramide sowohl als jenen des Octaëders sogleich bestimmen kann.

V. Man findet für diesen Körper folgende Werthe:

a) Seine Seitenlinie ist $= r\sqrt{2} = r \times 1{,}414214\ldots$

b) Die Fläche jedes Seiten-Dreiecks ist $= \frac{r^2\sqrt{3}}{2}$ $= r^2 \times 0{,}866025\ldots$

c) Der Halbmesser des ihm umschriebenen Kreises $= r\sqrt{\tfrac{2}{3}} = r \times 0{,}816496\ldots$

d) Die Gesammtfläche des Octaëders ist $= 4r^2\sqrt{3}$ $= r^2 \times 6{,}928203\ldots$

e) Sein Körperinhalt ist $= \frac{4r^3}{3} = r^3 \times 1{,}333333\ldots$

§. 4.

Vierte Aufgabe.

I. Die Seite des Dodecaëders zu finden, welches in eine Kugel von gegebenem Durchmesser construirt werden kann.

Wenn AB (Fig. 111, a.) die Seite des in die gegebene Kugel beschriebenen Dodecaëders ist, so soll die-

selbe aus dem gegebenen Durchmesser dieser Kugel berechnet werden.

II. Da sich die Puncte A, C, F und H in der Kugelfläche befinden, so bildet die durch sie gehende Ebene einen Kreis. Weil aber auch AB = BC = CM = MF = FG = GH = HL = LA und ∠ ABC = ∠ CMF = ∠ FGH = ∠ HLA ist, so sind die Dreiecke ABC, CMF, FGH und HLA einander congruent und man hat AC = CF = FH = HA. Weil nun diese Linien auch vier gleiche Sehnen in einem Kreise sind, so muß ACFH ein Quadrat seyn.

Da nun die zwölf regelmäßigen Fünfecke durch 24 Diagonallinien in 36 congruente Dreiecke getheilt werden und das Quadrat ACFH nur sechs derselben von dem ganzen Körper abschneidet, so folgt, daß alle diese 36 Dreiecke durch sechs Quadrate abgeschnitten werden, deren jedes dem Quadrate ACFH congruent ist, und welche zusammen einen Würfel einschließen, der in eben diese Kugel beschrieben werden kann. Die Seite dieses Würfels ist AC.

Es sei nunmehr AB = x und der Durchmesser der Kugel = d, so ist $AC = \sqrt{\frac{d^2}{3}}$ (§. 2, II.). Zieht man nun in dem regelmäßigen Fünfecke ABCDE (Fig. 111, b.) die Diagonalen AD und CE, so ist ∠ EAD = ∠ EDA; allein ∠ EDA = ∠ CED; folglich ist auch ∠ EAD = ∠ FED und die Dreiecke AED und EFD sind einander ähnlich. Daher hat man AD : ED = ED : FD. Allein wegen EF = FD ist auch AE = AF. Folglich wird die Proportion auch diese:

$$AD : ED = ED : AD - AE$$

und man hat nunmehr (Fig. 111, a.)

AC : AB = AB : AC — AB, oder

$$\sqrt{\frac{d^2}{3}} : x = x : \sqrt{\frac{d^2}{3}} - x, \text{ also}$$

$$x^2 = \frac{d^2}{3} - x\sqrt{\frac{d^2}{3}}, \text{ somit auch}$$

$$x^2 + x\sqrt{\frac{d^2}{3}} = \frac{d^2}{3} \text{ und}$$

$$x^2 + x\sqrt{\frac{d^2}{3}} + \frac{d^2}{21} = \frac{d^2}{3} + \frac{d^2}{12} = \frac{5\,d^2}{12}, \text{ folglich}$$

$$x + \sqrt{\frac{d^2}{12}} = \sqrt{\frac{5\,d^2}{12}} \text{ und endlich}$$

$$x = \sqrt{\frac{5\,d^2}{12}} - \sqrt{\frac{d^2}{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5\,d^2}{3}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{d^2}{3}}.$$

III. Aus der oben stehenden Gleichung $x^2 + x\sqrt{\frac{d^2}{3}} = \frac{d^2}{3}$ folgt diese $3x^2 + 3x\sqrt{\frac{d^2}{3}} = d^2$ oder auch $3x\left(x + \sqrt{\frac{d^2}{3}}\right) = d^2$. Da nun x die Seite des in die Kugel zu beschreibenden Dodecaëders und $\sqrt{\frac{d^2}{3}}$ jene des in sie zu construirenden Würfels ist, so entsteht der Lehrsatz: das Quadrat des Durchmessers der Kugel ist einem Rechtecke gleich, dessen eine Seite die Summe aus der Seite des in sie zu beschreibenden Dodecaëders und des Würfels und dessen andere Seite die dreifache Seite des Dodecaëders ist.

IV. Setzt man den Durchmesser der Kugel = 1, so wird die Seite des in sie zu beschreibenden Dodecaëders $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}$. Daher verhält sich jener zu dieser wie $1 : \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 2 : \sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}$ d. h. die Größen stehen in einem Irrational-Verhältnisse.

V. Für das Dodecaëder werden folgende Werthe gefunden:

a) Seine Seitenkante ist $= \frac{r(\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{3}} = r \times 0,713644 \ldots$

b) Der Inhalt einer jeden Seitenfläche ist $= r^2 \times \frac{\sqrt{5}}{6} \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} = r^2 \times 0,876218 \ldots$

c) Der Halbmesser des umschriebenen Kreises $= \frac{r\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}} = r \times 0,607062 \ldots$

d) Gesammtfläche des Dodecaëders $= 2r^2 \sqrt{5} \cdot \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} = r^2 \times 10,514616.$

e) Sein körperlicher Inhalt $= \frac{2r^3(5 + \sqrt{5})}{3\sqrt{3}} = r^3 \times 2,785164 \ldots$

§. 5.

Fünfte Aufgabe.

I. Wenn eine Kugel gegeben ist, und die Seite des in dieselbe zu construirenden Icosaëders soll gefunden werden, so erhält man, wenn ihr Durchmesser d und die zu bestimmende Seite x heißt, durch eine Entwickelung, welche der Privatübung des Liebhabers überlassen wird, $x = \sqrt{\left(\frac{d^2}{2} - \frac{d}{2}\sqrt{\frac{d^2}{5}}\right)}$, welcher Werth, in Zahlen ausgedrückt, wiederum eine Irrationalgröße gibt. — Das Streben, diesen Ausdruck zu construiren, ist ebenfalls eine lehrreiche Uebung.

II. Man erhält für das Icosaëder folgende Formeln:

a) Die Seite des Icosaëders wird $= \frac{r\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{\sqrt{5}}$ $= r \times 1{,}051462\ldots$

b) Der Inhalt jeder Seitenfläche desselben ist $= \frac{3\,r^2\,(5 - \sqrt{5})}{10\sqrt{3}} = r^2 \times 0{,}478727\ldots$

c) Der Halbmesser des umschriebenen Kreises $= \frac{r\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}} = r \times 0{,}607062\ldots$

d) Die gesammte Oberfläche ist $= \frac{6\,r^2\,(5 - \sqrt{5})}{\sqrt{3}}$ $= r^2 \times 9{,}574542\ldots$

e) Dessen Kubikinhalt $= \frac{2\,r^3\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}{3}$ $= r^3 \times 2{,}536150\ldots$

Da $\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} = 4 \sin. 36°$; ferner $\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} = 4 \cos. 18°$ ist, so können vorstehende Formeln um so bequemer berechnet werden.

§. 6.

Uebungs-Fragen.

I. Aus dem körperlichen Inhalte und der gesammten Oberfläche eines senkrechten Cylinders den Halbmesser seiner Grundfläche und seine lothrechte Höhe zu berechnen?

II. Aus der gesammten Umfangsfläche eines senkrechten Kegels und aus der Größe einer in gegebener Entfernung von der Spitze stattfindenden Parallelfläche mit der Grundfläche den Halbmesser dieser Grundfläche und die Höhe des Kegels zu finden.

III. Eine Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Achteck ist, hat einen gegebenen Inhalt und eine gegebene Höhe. Man soll eine ihr ähnliche Pyramide finden, deren Inhalt ebenfalls gegeben ist.

IV. Der Inhalt eines parallel mit der Grundfläche abgekürzten Kegels und seine Höhe ist gegeben, und der Halbmesser des größern Kreises soll sich zu jenem des kleinern verhalten wie n:m. Wie groß ist jeder derselben?

V. Aus dem gegebenen Inhalte einer parallel mit der Grundfläche abgekürzten Pyramide, aus der gegebenen Grundfläche und Höhe des Pyramidenstücks die Größe der obern Fläche zu finden?

VI. Von einem mit der Grundfläche parallel abgekürzten Kegel soll $\frac{n}{m}$ seines Inhaltes durch eine ebenfalls mit ihr gleichlaufende Ebene abgeschnitten werden?

Neunter Lehrgang.

Anhang zur gesammten Raumlehre.

I. Lehrübung.

Begriff und Anwendungen der Erhaustions-Methode.

§. 1.

Begriff dieser Methode.

I. «Erhaustions-Methode ist ein Verfahren, Größen, welche sich durch ihre vollständigen Theile nicht vergleichen lassen, vermittelst anderer Größen zu vergleichen, welche jene zwar nicht vollkommen erschöpfen, aber doch ihnen als Grenzen unbestimmt nahe gebracht werden können.»

II. «Die alten Geometer bedienten sich desselben bei Vergleichung krummliniger Figuren, krummer Oberflächen und runder Körper. Es machte ihre Analysis des Unendlichen aus, welche näher kennen

zu lernen es sich verlohnet, sowohl um sie mit der unserigen, soviel weiter greifenden, zu vergleichen, als auch um zu sehen, wie künstlich sie ein einfaches Werkzeug zu gebrauchen gewußt haben. Sie betrachteten eine krumme Linie nicht als ein Polygon von unendlich vielen Seiten; sie zerlegten Figuren, Körper und Oberflächen nicht in unendlich viele, unendlich kleine Theile, sondern das Krumme unterschieden sie sorgfältig vom Gradlinigen und verglichen nur Theile, die ostensibel sind, oder eine endliche, vergleichbare Größe haben. Sie betrachteten aber die krummlinigen Figuren als Grenzen von geradlinigen und zeigten, daß das Verhältniß derselben zu einer ebenen weder größer noch kleiner seyn könne, als ein gewisses bestimmtes, und so auch an Körpern und Oberflächen. Es war bei ihnen ein Grundsatz, daß jede Größe so oft genommen werden kann, bis sie jede Größe ihrer Art übertrifft; sie würden aber den Satz, daß eine unendlich kleine Größe, unendlich oft genommen, etwas Endliches gibt, schwerlich sich haben gefallen lassen.»

III. «Der Hülfssatz, welcher zu den Beweisen in der Geometrie des Krummen von den Alten gebraucht wird, ist folgender: Sind zwei ungleiche Größen, A und a gegeben und man nimmt von der größern A mehr als die Hälfte weg, von dem Reste wieder mehr als die Hälfte, und so immer fort, so kömmt man irgend einmal auf einen Rest, der kleiner ist, als die gegebene kleinere Größe a. (Euclides Element. X, 1.) Die Alten sagten nicht, die Theile einer Größe können unendlich klein genommen oder gedacht werden.»

IV. « Diese Exhaustions-Methode, welche, wie gesagt, die Analysis des Unendlichen der Alten ausmacht, ist von viererlei Art. Die erste lernt man aus dem zwölften Buche der Euclidischen Elemente, die andern aus den Schriften des Archimedes kennen». G. S. Klügel's mathematisches Wörterbuch II. Th. S. 152 u. f.

§. 2.

Erstes Beispiel dieser Methode.

I. Zwei Kreisflächen verhalten sich gegen einander, wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

Es seien (Fig. 112.) ABCD und EFGH die beiden Kreisflächen, so ist Kr. ABCD : Kr. EFGH $=$ BD^q : FH^q.

II. Wäre nicht BD^q : FH^q $=$ Kr. ABCD : Kr. EFGH, so sei BD^q : FH^q $=$ Kr. ABCD : R und es müßte R $>$ Kr. EFGH oder R $<$ Kr. EFGH seyn.

III. Es sei erstlich R $<$ Kr. EFGH oder Kr. EFGH $= R + X$.

Man beschreibe in dem Kr. EFGH das Quadrat EG, welches aus den congruenten Dreiecken FEH und FGH besteht und die Hälfte des um den Kreis beschriebenen Quadrates ist. Dieses umschriebene Quadrat ist größer als der Kreis; daher muß seine Hälfte d. h. das innere Quadrat, größer als die Hälfte des Kreises seyn.

IV. Werden die Bogen EF, FG, GH, HE in I, K, L, M halbirt und die geraden EI, IF, FK, KG, GL, LH, HM, ME gezogen, so ist jeder der

entstehenden vier congruenten Dreiecke, wie z. B. IFE > als die Hälfte des Abschnittes FIE. Denn wenn durch I eine Tangente gezogen und das Rechteck EF gebildet wird, so ist dasselbe größer als Abschnitt FIE; folglich muß die Hälfte des Rechtecks, d. h. das Dreieck FIE, größer als die Hälfte dieses Abschnittes seyn.

V. Da nun ebendieses von allen folgenden, durch fortgesetzte Halbirungen der Bogen entstehenden Dreiecken gilt, und hierdurch vom Kreise EFGH mehr als die Hälfte weggenommen wird, und vom Reste wieder mehr als die Hälfte und immer so fort, so müssen einmal Abschnitte entstehen, welche zusammengenommen kleiner sind, als jede gegebene Größe X. Nun war Kr. EFGH = R + X. Folglich ist das Vieleck EIFKGLHM > R.

VI. Beschreibt man nun in den Kr. ABCD ein dem vorigen ähnliches Vieleck ANBOCPDQ, so ist BDq : FHq = ANBOCPDQ : EIFKGLHM. Nun war, nach der Voraussetzung, BDq : FHq = Kr. ABCD : R; folglich ist nunmehr Kr. ABCD : R = Vieleck ANB . . . : Vieleck EIF . . . Nun ist aber offenbar Kr. ABCD > Vieleck ANB . . . Folglich auch R > Vieleck EIF . . ., welches dem Vorherbewiesenen, Vieleck EIF . . . > R widerspricht.

VII. Daher ist es unmöglich, daß BDq : FHq = Kr. ABCD : R, wenn R < Kr. EFGH ist. Allein aus eben diesen Gründen ist es auch unmöglich, daß FHq : BDq = Kr. EFGH : Z, wenn Z < Kr. ABCD ist.

VIII. Setzte man nun zweitens BDq : FHq = Kr. ABCD : R; so, daß R > Kr. EFGH wäre,

so ist auch $FH^q : BD^q = R :$ Kr. ABCD. Nun mache man $R :$ Kr. ABCD $=$ Kr. EFGH $: Z$; so, daß, weil $R >$ Kr. EFGH, auch Kr. ABCD $> Z$ ist. Folglich wäre $FH^q : BD^q =$ Kr. EFGH $: Z$, welches, weil $Z <$ Kr. ABCD, nach dem ersten Falle unmöglich ist.

§. 3.

Zweites Beispiel dieser Methode.

I. Hülfssatz a) Jede dreieckige Pyramide kann in zwei, einander congruente, der gegebenen ähnliche Pyramiden und in zwei unter sich gleiche dreieckige Prismen getheilt werden, welche zusammengenommen mehr als die Hälfte der ganzen Pyramide betragen.

Es sei AEGI (Fig. 113.) die gegebene dreieckige Pyramide, so nehme man $AB = \frac{1}{2} AE$, $AC = \frac{1}{2} AG$ und $AD = \frac{1}{2} AI$, ziehe die Verbindungslinien BC, CD, DB, so ist ABCD eine dreieckige Pyramide, welche (wie leicht ersichtlich) der ganzen ähnlich ist. Wird nun $IK = \frac{1}{2} IE$, $IH = \frac{1}{2} IG$ und $EF = \frac{1}{2} EG$ gemacht, auch DK, DH, KF und CF gezogen, so wird man den Beweis dafür leicht finden, daß Pyr. DKHI $\cong$ Pyr. ABCD und Prisma BCDEFK $=$ Prisma FCGKDH ist. Endlich wird auch sogleich einleuchtend, daß Prisma BCDEFK $+$ Prisma FCGKDH $> \frac{1}{2}$ Pyr. AEGI sei.

II. Hülfssatz b) Wenn zwei dreieckige Pyramiden gleiche Höhe haben und es wird jede derselben in zwei, unter sich congruente, der ganzen ähnliche

Pyramiden und in zwei unter sich gleiche dreieckige Prismen getheilt, und jede kleinere Pyramide wiederum auf diese Weise und so immer fort, so verhält sich die Summe aller in der ersten Pyramide entstehenden Prismen zur Summe aller Prismen in der zweiten Pyramide wie die Grundfläche der ersten sich zur Grundfläche der andern verhält.

Es seien (Fig. 114.) ABCG und DEFH die beiden gegebenen Pyramiden, ABC und DEF ihre Grundflächen, G und H ihre Spitzen, und die von G auf ABC, von H auf DEF gezogenen Lothe seien gleich, so verhält sich die Summe aller (nach I.) in ABCG entstehenden Prismen zur Summe aller in DEFH entstehenden Prismen wie $\triangle$ ABC : $\triangle$ DEF.

III. Da das Loth von G auf ABC dem Lothe von H auf DEF gleich ist, auch $\triangle$ OLM $\#$ $\triangle$ ABC, $\triangle$ RTS $\#$ $\triangle$ DEF und $GM = \frac{1}{2} GC$, $HS = \frac{1}{2} HF$ ist, so sind auch die Hälften jener Lothe gleich und die beiden Prismen KNCOLM und QVFRTS haben gleiche Höhen; verhalten sich demnach wie ihre Grundflächen KNC und QVF.

Wegen $CN = \frac{1}{2} CB$ und $CK = \frac{1}{2} CA$ ist $\triangle$ KNC $\sim$ $\triangle$ ABC. Aus gleichem Grunde auch $\triangle$ QVF $\sim$ $\triangle$ DEF. Und man hat $\triangle$ ABC : $\triangle$ DEF = $\triangle$ KNC : $\triangle$ QVF. Allein es war $\triangle$ KNC : $\triangle$ QVF = Prisma KNCOLM : Prisma QVFRTS; folglich ist $\triangle$ ABC : $\triangle$ DEF = Prisma KNCOLM : Prisma QVFRTS = Prisma IBNKOL : Prisma PEVQRT. Daher muß auch $\triangle$ ABC : $\triangle$ DEF = Prisma KNCOLM + Prisma IBNKOL : Prisma QVFRTS + Prisma PEVQRT seyn.

Werden nun die entstandenen kleineren Pyramiden AIKO und DPQR wieder ebenso getheilt, so sind aus gleichem Grunde die zwei Prismen in jener Pyramide zu den zwei Prismen in dieser Pyramide wie △ AIK : △ DPQ d. h. wie △ ABC : △ DEF. Folglich sind die vier Prismen in ABCG zu den vier Prismen in DEFH wie △ ABC : △ DEF.

Vollkommen auf gleiche Art wird der Beweis sowohl für die in OLMG und RTSH entstehenden dreieckigen Prismen geführt, als auch für alle, welche aus den fernern Eintheilungen hervorgehen.

IV. **Hauptsatz.** Wenn zwei dreieckige Pyramiden gleiche Höhe haben, so verhalten sich ihre Körperräume wie ihre Grundflächen.

Es seien (Fig. 114.) ABCG und DEFH die beiden Pyramiden, ABC und DEF ihre Grundflächen und die Lothe aus G auf ABC und aus H auf DEF von gleicher Größe, so ist Pyr. ABCG : Pyr. DEFH = △ ABC : △ DEF.

Hätte diese Proportion nicht statt, so setze man △ ABC : △ DEF = Pyr. ABCG : X und es müßte X < Pyr. ABCG oder X > Pyr. ABCG seyn.

Es sei **fürs Erste** Pyr. DEFH = X + R. Theilt man diese Pyr. DEFH auf vorbemerkte Weise in ihre Pyramiden und Prismen, die entstehenden kleinern Pyramiden wiederum in Pyramiden und Prismen und so fort, so entstehen einmal Pyramiden, welche kleiner sind als R. Nun ist Pyr. DEFH = X + R; folglich sind die Prismen der Pyramide DEFH > X.

Wird nun die andere Pyramide ABCG auf gleiche Art und eben so oft getheilt, so verhalten sich die

Prismen der Pyramide ABCG zu den Prismen der Pyramide DEFH wie △ ABC : △ DEF d. h. nach obiger Voraussetzung, wie Pyr. ABCG : X. Nun sind die Prismen der Pyr. ABCG offenbar < Pyr. ABCG. Folglich sind auch die Prismen der Pyr. DEFH < X, welches dem Früheren, daß die Prismen der Pyr. DEFH > X sind, widerspricht. Daher kann nicht △ ABC : △ DEF = Pyr. ABCG : X seyn, weil X < Pyr. DEFH ist. Eben daher ist es auch unmöglich, daß △ DEF : △ ABC = Pyr. DEFH : Z sei, wenn Z < Pyr. ABCG ist.

Es sei fürs Zweite △ ABC : △ DEF = Pyr. ABCG : X und X > Pyr. DEFH, so ist auch △ DEF : △ ABC = X : Pyr. ABCG. Nun mache man X : Pyr. ABCG = Pyr. DEFH : Z; so, daß, weil X > Pyr. DEFH, auch Pyr. ABCG > Z, d. h. Z < Pyr. ABCG ist. Folglich würde △ DEF : △ ABC = Pyr. DEFH : Z, welches, weil Z < Pyr. ABCG, nach dem ersten Falle unmöglich ist.

§. 4.

Viertes Beispiel dieser Methode.

I. Jeder Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders, welcher mit ihm Grundfläche und Höhe gemein hat.

Es befinde sich über dem Kreise ABCD (Fig. 115.) ein Cylinder und ein Kegel von derselbigen Höhe, so ist der Kegel = $\frac{1}{3}$ des Cylinders.

II. Wäre dieses nicht, so müßte entweder Kegel < $\frac{1}{3}$ Cylinder oder Kegel > $\frac{1}{3}$ Cylinder seyn.

Es sei fürs Erste Keg. $<\frac{1}{3}$ Cyl. oder Cyl. $=$ 3 Keg. $+$ X.

Beschreibt man in den Kreis der gemeinschaftlichen Grundfläche das Quadrat ABCD, halbirt die Bogen AB, BC, CD, DA in E, F, G, H, ziehet AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA, und denkt sich die Tangenten durch alle Theilungspuncte E, F, G, H nebst den verlängerten Seiten des eingeschriebenen Quadrats, so ist das innere Quadrat die Hälfte des äussern, und jedes Dreieck, wie AEB, die Hälfte seines Parallelogrammes. Denkt man sich nun über die hier entstandenen Figuren Prismen von der Höhe des Cylinders, welche sich wie ihre Grundflächen verhalten, so ist das Prisma über dem innern Quadrate die Hälfte des Prismas über dem äussern Quadrate und folglich größer als die Hälfte des Cylinders. Auch ist das Prisma über jedem Dreiecke, wie AEB, die Hälfte des Prisma's über dem ihm entsprechenden Parallelogramme; folglich größer als die Hälfte des Abschnitts vom Cylinder, dessen Basis das Segment BEA ist.

Wird diese Theilung auf ähnliche Weise fortgesetzt, so erhält man einmal Abschnitte des Cylinders, welche zusammengenommen kleiner, als jeder Körper X sind. Daher ist nun, weil Cylinder $=$ 3 Kegel $+$ X, das Prisma von der Höhe des Cylinders, dessen Basis das Vieleck AEBFCGDH ist, auch $>$ 3 Keg. Es ist aber eine Pyramide der dritte Theil eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe. Folglich wäre eine solche Pyramide größer als ein Kegel von gleicher Grundfläche und Höhe; d. h. ein Theil wäre größer als das Ganze, was unmöglich ist.

Es sei fürs Zweite Keg. > ⅓ Cyl. und daher Keg. = ⅓ Cyl. + X.

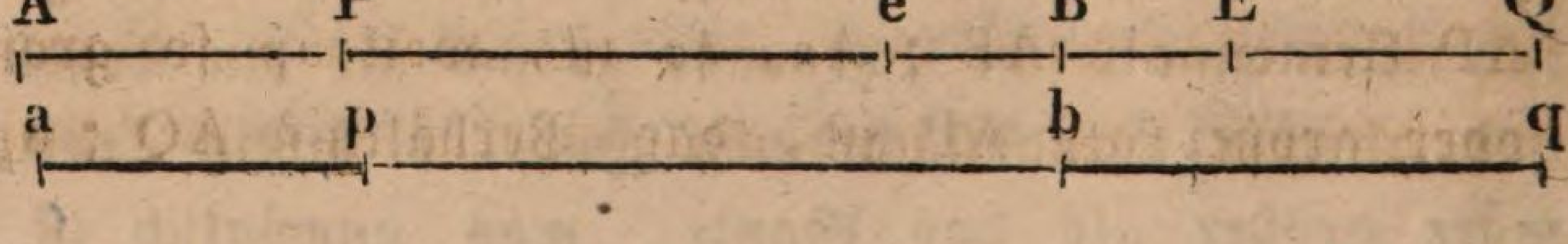
Wie vorhin von dem Cylinder Abschnitte gemacht worden sind, so mache man sie nun von dem Kegel, welche zusammen einmal kleiner als jeder Körper X werden. Daher ist aus gleichen Gründen die Pyramide von der Höhe des Cylinders, deren Basis das Vieleck AEBFCGDH ist, ebenfalls > ⅓ Cyl. Allein ein Prisma von eben dieser Grundfläche und Höhe ist dreimal so groß, als diese Pyramide. Daher wäre dieses Prisma größer als der Cylinder d. h. ein Theil größer als das Ganze, was nicht seyn kann.

§. 5.

Andere Art der Exhaustions-Methode, nach Archimedes.

I. «Eine bestimmte Größe A liegt zwischen zwei andern unbestimmten, aber der Form nach gegebenen Größen; so, daß ihr Unterschied von diesen beliebig klein gemacht werden kann. Eine andere, gleichfalls bestimmte Größe B liegt zwischen denselben oder noch weniger verschiedenen Größen (indem die größere kleiner als die größere jener und die kleinere größer als die kleinere jener ist) so sind A und B gleich groß.

II. In der allgemeinen Abbildung bedeuten AB, ab zwei bestimmte Größen von verschiedener Form,



AP, AQ zwei unbestimmte, zwischen welchen AB liegt; so, daß das Verhältniß AP : AQ dem von 1 : 1 näher kommen möge, als irgend ein Verhältniß einer kleinern zu einer größern Größe. Eben so falle ab zwischen zwei Größen ap, aq, deren Verhältniß dem von 1:1 näher kommen könne, als irgend ein Verhältniß zweier auf ähnliche Art ungleichen Größen und ap sei entweder gleich AP oder größer, so wie aq gleich AQ oder kleiner. Bei diesen Annahmen müssen die in der Form verschiedenen, AB, ab, gleich groß seyn.»

III. «Man mag dieses gleich daraus schließen, daß die Verhältnisse AP : AQ und ap : aq dem von 1 : 1 nicht unbedingt nahe genommen werden könnten. Wäre ab größer oder kleiner als AB, wie es die AE oder ae sind, so wäre entweder das Verhältniß AB : AE oder das Ae : AB die Grenze für AP : AQ.»

IV. «Die Beweisart des Archimedes ist im Allgemeinen folgende.

Man setze endlich ab sei größer als AB, oder gleich AE. Da das Verhältniß AQ : AP dem 1 : 1 sich unbedingt nähern kann, so lann dasselbe kleiner als das AE : AB, genommen werden. Da ferner aq so groß oder kleiner als AQ ist, und ab = AE, so ist das Verhältniß aq : AP kleiner als das, ab : AB. Dieses ist nicht möglich, da aq größer als ab und AP kleiner als AB ist.

Man setze zweitens ab sei kleiner als AB, oder gleich Ae. Man nehme nun das Verhältniß AQ : AP kleiner als AB : Ae, so ist, weil ap so groß oder größer als AP ist, das Verhältniß AQ : ap

kleiner als AB : ab. Dieses ist nicht möglich, weil AQ größer als AB, und ap kleiner als ab ist.

Demnach muß ab = AB seyn.» Klügel a. a. O. S. 157 u. f.

§. 6.

Beispiel zur Erläuterung dieser Methode.

I. Jeder Kreis ist einem rechtwinkeligen Dreiecke gleich, dessen eine Cathete der Halbmesser, die andere der Umfang desselben ist.

Es sei ABCD (Fig. 116.) der gegebene Kreis und RST das rechtwinkelige Dreieck, worin RS = NA und ST = Peripherie des Kreises um NA ist, so wird die Ebene des Dreiecks jener des Kreises gleich seyn.

II. Man setze einmal, der Kreis sei größer als dieses Dreieck. Beschreibt man in den Kreis das Quadrat ABCD, dann das regelmäßige Achteck AFB... und so ferner, bis die Summe der Abschnitte kleiner ist als der Ueberschuß des Kreises über das Dreieck, so ist dieses Vieleck noch größer als das Dreieck.

Zieht man nun das Loth NO, so ist NO kleiner als die Seite RS des Dreiecks RST. Allein die Summe aller Vielecksseiten ist ebenfalls kleiner als der Umfang des Kreises, d. h. kleiner als die Seite ST eben dieses Dreiecks RST. Folglich muß dieses Vieleck auch kleiner als das Dreieck seyn, welches unmöglich ist.

III. Wäre aber der Kreis kleiner als das Dreieck, so beschreibe man um denselben ein Quadrat PV und durch Halbirung der Bogen, das regelmäßige

Achteck in der Figur. Hier ist $\measuredangle$ PAR = $\measuredangle$ PAQ = 90°, folglich, da RA = RM und PR > RA ist, auch PR > RM. Daher ist △ RPQ > ½ Viereck PFAM. Folglich entstehen einmal äussere Abschnitte, wie AQF, welche zusammengenommen kleiner sind, als der Ueberschuß des Dreiecks über den Kreis. Daher ist das um den Kreis beschriebene Vieleck noch kleiner als das Dreieck. — Allein dieses Vieleck muß immer größer als der Kreis seyn, weil NA zwar der Cathete RS immer gleich; der Umfang des Vielecks aber immer größer als der Umfang des Kreises, folglich auch größer als die Cathete ST ist. Daher führt auch diese Annahme auf einen Widerspruch.

Somit ist der Kreis mit NA dem Dreiecke RST gleich.

IV. Die Entwickelung der beiden andern Arten der Exhaustions-Methode, deren sich Archimedes in seinen Schriften bedient, läßt sich am Bequemsten an Beispielen aus der höhern Raumlehre; die dritte z. B. an der Kubirung des parabolischen Kegels und die vierte an der Quadratur der Parabel nachweisen. Da die Betrachtung dieser Körper und Figuren der höheren Geometrie angehört, so wird dieser Gegenstand bis zum folgende Bande des gegenwärtigen Lehrbegriffes verschoben.

§. 7.

Uebungs-Fragen.

I. Was ist die Exhaustions-Methode? Wozu bedienten sich die alten Geometer derselben? Wie haben sie die krummlinigen Figuren, wie die von krummen Flächen einge-

schlossenen Körper betrachtet? Welchen Grundsatz gebrauchten sie bei ihrem Verfahren? Nahmen sie unendlich kleine Größen an? — Welcher Hülfssatz diente ihnen zur Anwendung dieser Methode? Wie kann man diese Methode mit einem neuern Ausdrucke bezeichnen? Wo findet man die lehrreichsten Beispiele derselben? (§. 1.)

II. Erläuterung der Exhaustions-Methode durch einige Sätze aus den Elementen des Euclides? (§.2—4)

III. Erläuterung derselben aus den Schriften des Archimedes in einem einfachen Beispiele? (§. 5, 6.)

II. Lehrübung.

Data des Euclides.

§. 1.

Einige allgemeine Bemerkungen.

I. Die Data des Euclides sind von den neuern Geometern als ein kostbares Ueberbleibsel der Geometrie der Alten anerkannt, welchen sie zu ihrer Analysis äusserst wichtig war. Kästner sagte: «die geometrische Analysis der Alten erfoderte, daß man gegenwärtig hatte, was aus unmittelbar bekannten Dingen sogleich durch nahe Folge gegeben ist; z. B. Wenn ein Paar gerade Linien, welche einander schneiden, der Lage nach gegeben sind, daß auch ihr Durchschnittspunct gegeben ist» (Anfangsgründe der Arithm. Geom. u. s. f. Göttingen 1800, S. 452) und Klügel bemerkt (Mathem. Wörterb. S. 706 u. f.) Folgendes: «Mittelst dieser Sätze sucht man bei der Auflösung einer Aufgabe, was aus den gegebenen Dingen folgt, was aus diesen wieder hergeleitete wird u. s. w. bis man findet, daß das, was in der Auflösung zu

leisten verlangt wird, gegeben sei. Oder man geht von dem Gesuchten als gegeben aus, und sucht, wie man durch Größen und Verhältnisse, deren eins durch das andere gegeben wird, auf etwas gegebenes komme, um von diesem wieder auf das Gesuchte zurückzugehen.»

II. Diese Data sind zuerst griechisch und lateinisch mit den übrigen Schriften des Euclides von Dasypodius zu Straßburg im Jahr 1571 herausgegeben worden. Eine besondere Ausgabe mit lateinischer Uebersetzung und Anmerkungen ist im J. 1625 von Claudius Hardy erschienen. Gregory hat diese Uebersetzung seiner griechischen Ausgabe des Euclides, Oxford, 1703 beigefügt. Durch Robert Simson ist später eine englische Uebersetzung geliefert worden, mit den ihm nöthig geschienen Verbesserungen des Textes und Abänderungen. Diese Ausgabe ist im Jahr 1780 von Joh. Christ. Schwab unter dem Titel: Euclides Data, verbessert und vermehrt von Robert Simson; aus dem Englischen übersetzt, und mit einer Sammlung geometrischer, nach der analytische Methode der Alten aufgelößter Probleme begleitet. — Vor wenigen Jahren ist erschienen: Euclides Data, nach dem Griechischen mit Robert Simsons Zusätzen herausgegeben von Jul. Friedr. Wurm mit 2 Steintafeln. Berlin, 1825. Ist als wohlfeile Handausgabe zu empfehlen. Zu §. 4. ist dieselbe benützt worden.

§. 2.

Hülfs-Erklärungen.

I. Diese Data des Euclides sind auf folgende 10 Erklärungen gebaut, welche hierhergesetzt werden, um die nachstehenden Beispiele desto besser übersehen zu können.

a) Räume, Linien und Winkel heißen der Größe nach gegeben, wenn Räume, Linien und Winkel, die ihnen gleich sind können gefunden werden.

b) Ein Verhältniß heißt gegeben, wenn ein ihm gleiches Verhältniß einer gegebenen Größe zu einer gegebenen Größe kann gefunden werden.

c) Geradlinige Figuren heissen der Art nach gegeben, wenn jeder ihrer Winkel gegeben ist und die Verhältnisse ihrer Seiten gegeben sind.

d) Puncte, Linien und Räume heissen der Lage nach gegeben, wenn sie beständig einerlei Lage haben und entweder wirklich dargelegt sind oder gefunden werden können.

e) Ein Winkel heißt der Lage nach gegeben, wenn er zwischen geraden, der Lage nach gegebenen Linien enthalten ist.

f) Ein Kreis heißt der Größe nach gegeben, wenn eine aus seinem Mittelpuncte an den Umfang gezogene gerade Linie der Größe nach gegeben ist.

g) Ein Kreis ist der Größe und Lage nach gegeben, wenn sein Mittelpunct der Lage nach gegeben und eine daraus an dem Umfang gezogene gerade Linie der Größe nach gegeben ist.

h) Kreisabschnitte heissen der Größe nach gegeben, wenn die Winkel darin und ihre Grundlinien der Größe nach gegeben sind.

i) Kreisabschnitte heissen der Lage und Größe nach gegeben, wenn die Winkel darin der Größe nach gegeben und ihre Grundlinien nach Lage und Größe gegeben sind.

k) Eine Größe heißt um eine gegebene Größe größer als eine andere, wenn nach Wegnahme der gegebenen Größe das was übrig bleibt, der andern Größe gleich ist.

l) Eine Größe heißt um eine gegebene Größe kleiner als eine andere, wenn nach Beifügung dieser gegebenen Größe das Ganze der andern Größe gleich ist.

II. Ausser diesen zehn Definitionen befinden sich in der Ausgabe von Wurm noch fünf andere, welche Robert Simson in seiner Uebersetzung weggelassen hat, weil drei derselben in den Datis nirgends gebraucht; die zwei andern aber, welche sich nicht so kurz darstellen lassen, wie sie im Griechischen ausgedrückt sind, wo sie vorkommen, umschrieben werden.

§. 3.

Die ersten sechs Sätze aus den Datis.

I. Erster Satz. Wenn zwei Größen gegeben sind, so ist ihr Verhältniß gegeben.

Es seien (Fig. 117.) A und B zwei gegebene Größen, so ist A : B gegeben.

Weil A eine gegebene Größe ist, so läßt sich eine ihr gleiche Größe finden (Erkl. a.). Diese sei C. Ebenso

läßt sich, weil B gegeben ist, eine ihr gleiche Größe finden. Diese sei D. Weil nun A = C und B = D, so ist A : B = C : D. Folglich ist das Verhältniß der gegebenen Größen C und D, welches mit A : B einerlei ist, gefunden.

II. Zweiter Satz. Wenn eine gegebene Größe zu einer andern ein gegebenes Verhältniß hat, und wenn zu den zwei Größen, wodurch das gegebene Verhältniß ausgedrückt wird, und zu der gegebenen Größe sich eine vierte Proportional-Größe finden läßt, so ist die andere Größe gegeben.

Die gegebene Größe A (Fig. 118.) habe zur Größe B ein gegebenes Verhältniß. Wenn zu den drei genannten Größen sich eine vierte Proportional-Größe finden läßt, so ist B der Größe nach gegeben.

Weil A gegeben ist, so läßt sich (Erkl. a) ein ihr gleiche Größe finden. Diese sei C. Und weil A : B gegeben ist, so läßt sich ein ihm gleiches Verhältniß finden. Es sei das Verhältniß der gegebenen Größen E : F. Nun finde man zu den Größen E, F, C eine vierte Proportional-Größe D, welches zufolge der Hypothese möglich ist. Da also A : B = E : F und E : F = C : D, so ist A : B = C : D. Nun ist A = C, folglich B = D. Mithin ist die Größe B gegeben, weil (Erkl. a.) eine ihr gleiche D ist gefunden worden.

III. Dritter Satz. Wenn gegebene Größen einander beigefügt werden, so ist ihre Summe gegeben.

Es seien (Fig. 119.) die gegebenen Größen AB und BC einander beigefügt, so ist ihre Summe AC gegeben.

Weil AB gegeben ist, so läßt sich (Erkl. a.) eine ihr gleiche Größe finden. Sie sei DE. Und weil BC

gegeben ist, so läßt sich eine ihr gleiche Größe finden. Sie sei EF. Weil nun AB = DE und BC = EF ist, so ist (AB + BC) = AC = (DE + EF) = DF. Folglich ist AC gegeben, weil die ihr gleiche DF ist gefunden worden.

IV. Vierter Satz. Wenn eine gegebene Größe von einer gegebenen weggenommen wird, so ist der Rest gegeben.

Von der gegebenen Größe AB (Fig. 120.) werde die gegebene AC weggenommen, so ist der Rest CB gegeben.

Weil AB gegeben ist, so läßt sich (Erkl. a.) eine ihr gleiche Größe finden. Diese sind DE. Und weil AC gegeben ist, so läßt sich eine ihr gleiche Größe finden. Diese sei DF. Da nun AB = DE, AC = DF, so ist der Rest CB dem Reste FE gleich. Mithin ist CB gegeben, weil eine ihr gleiche FE ist gefunden worden.

V. Fünfter Satz. Wenn von drei Größen die erste sammt der zweiten und ebenso die zweite sammt der dritten gegeben ist, so ist entweder die erste gleich der dritten, oder eine davon ist um eine gegebene Größe größer als die andere.

Die drei Größen seien (Fig. 121.) AB, BC, CD, wovon AB samt BC, d. h. AC gegeben sei. Und gleicherweise sei BC samt CD d. h. BD gegeben. Entweder ist AB = CD, oder eine davon ist um eine gegebene Größe größer als die andere.

Weil AC, BD, jeder für sich, gegeben sind, so sind sie entweder einander gleich oder nicht. Gesetzt sie seien einander gleich, so nehme man, weil nun

AC = BD, den gemeinschaftlichen Theil BC hinweg, so wird der Rest AB dem Reste CD gleich seyn.

Wenn sie aber ungleich sind, so sei AC > BD, und man mache CE = BD. Hier ist CE gegeben, weil BD gegeben ist. Da die ganze AC gegeben ist, so ist (Satz 4.) der Rest AE gegeben und weil EC = BD, so ist (EC — BC) = EB = (BD — BC) = CD. Weil nun AE gegeben ist, so ist AB > EB d. h. AB > CD um die gegebene Größe AE.

VI. Sechster Satz. Wenn eine Größe ein gegebenes Verhältniß zu einem ihrer Theile hat, so wird sie auch zu ihrem andern Theile ein gegebenes Verhältniß haben.

Die Größe AB (Fig. 122.) habe zu AC, einem ihrer Theile, ein gegebenes Verhältniß, so wird sie auch zu dem andern Theile BC ein gegebenes Verhältniß haben.

Weil AB : BC gegeben ist, so läßt sich (Erkl. b.) ein ihr gleiches Verhältniß finden; es sei das Verhältniß der gegebenen Größe DE zur gegebenen Größe DF. Weil nun DE, DF gegeben sind, so ist (Satz 4.) der Rest FE gegeben; und weil AB : AC = DE : EF, so ist AB : BC = DE : EF. Folglich ist AB : BC gegeben, weil das ihm gleiche Verhältniß der gegebenen Größen DE, EF ist gefunden worden.

Zusatz. Hieraus folgt, daß die Theile AC, CB ein gegebenes Verhältniß zu einander haben. Denn AB : BC = DE : EF; folglich AC : CB = DF : FE. Da nun DF, FE gegeben sind, so ist (Erkl. b.) auch AC : CB gegeben.

§. 4.

Sechs weitere Sätze aus den Datis.

I. Satz 28. Wenn zwei, der Lage nach gegebene Linien einander schneiden, so ist ihr Durchschnittspunct gegeben.

Es seien (Fig. 123) AB, CD die der Lage nach gegebenen sich schneidenden Linien, so ist ihr Durchschnittspunct E gegeben.

Wäre er nicht gegeben, so würde er seine Stelle ändern (Erkl. d); also würde zugleich eine der Linien AB, CD ihre Lage ändern. Dieses findet aber nicht Statt (Erkl. d); folglich ist der Punct E gegeben.

Da die Linien AB, CD gefunden werden können (Erkl. d) so kann man auch den Punct oder die Puncte finden, wo sie einander schneiden. Folglich sind diese Puncte der Lage nach gegeben.

II. Satz 29. Wenn die Endpuncte einer geraden Linie der Lage nach gegeben sind, so ist die gerade Linie der Lage und Größe nach gegeben.

Es seien (Fig. 124.) die Endpuncte A, B der geraden AB gegeben, so ist diese AB selbst nach Lage und Größe gegeben.

Wenn, während der Punct A an seiner Stelle bliebe, die Lage oder Größe von AB sich änderte, so würde auch der Punct B seine Stelle verändern. Dieses geschieht aber nicht (Erkl. d.) Folglich ist die AB der Lage und Größe nach gegeben.

Die Endpuncte A, B können gefunden werden (Erkl. d) zwischen ihnen kann man die gerade AB ziehen, welche eine unveränderliche Lage hat, und deren Größe gefunden ist.

III. Satz. 30. Wenn von einer, der Lage und Größe nach gegebenen geraden Linie der eine Endpunct gegeben ist, so ist auch der andere gegeben.

Es sei (Fig. 125.) von der, nach Lage und Größe gegebenen AB der eine Endpunct A gegeben, so ist auch B gegeben.

Wenn, während A bliebe, B seine Stelle änderte, so würde sich die Lage oder Größe der geraden Linie AB ändern. Dieses geschieht aber nicht. (Erkl. d) Also ist B gegeben.

Da AB der Größe nach gegeben ist, so kann man (Erkl. a) eine ihr gleiche gerade Linie D finden. Von der, der Lage nach gegebenen geraden Linie schneide man eine der D gleiche, AB ab, so ist der Punct B gefunden.

IV. Satz. 31. Wenn durch einen gegebenen Punct eine gerade Linie, parallel mit einer der Lage nach gegebenen gezogen ist, so ist sie auch der Lage nach gegeben.

Es sei durch A (Fig. 126.) die gerade DAE parallel mit der nach ihrer Lage gegebenen BC gezogen, so ist sie auch der Lage nach gegeben.

Sonst würde, während A bliebe, die Lage der DAE sich ändern. Bliebe sie in der veränderten Lage FAG mit der BC parallel, so wären DAE, FAG mit einander selbst parallel. Aber zugleich träfen sie auch zusammen, was unmöglich ist. Folglich kann sich die Lage der DAE nicht ändern; daher ist sie der Lage nach gegeben.

Durch A ziehe man die gerade DAE mit BC parallel. Diese hat immer dieselbe Lage, weil keine

andere gerade Linie durch A mit BC gleichlaufend gezogen werden kann. Also ist die so gefundene gerade Linie der Lage nach gegeben.

V. Satz 32. Wenn an eine, der Lage nach gegebene gerade Linie durch einen in derselben gegebenen Punct eine gerade Linie gezogen ist, welche mit jener einen gegebenen Winkel bildet, so ist diese der Lage nach gegeben.

Durch den Punct C (Fig. 127.) in der gegebenen AB sei CD unter dem gegebenen Winkel ACD gezogen, so ist CD der Lage nach gegeben.

Sonst würde, während C bliebe, die Lage der CD sich ändern. Bliebe bei der veränderten Lage CE die Größe des Winkels dieselbe, so wäre $\angle$ DCA = $\angle$ ECA, d. h. der größere gleich dem kleinern, was unmöglich ist. Folglich ist CD der Lage nach gegeben.

Da der Winkel ACD gegeben ist, so kann man einen ihm gleichen Winkel F finden. Nun setze man an die gegebene AB und an den in ihr gegebenen Punct C einen $\angle$ ACD = $\angle$ F. Die DC behält immer dieselbige Lage, weil eine andere, durch C gezogene gerade Linie mit AB einen größern oder kleinern Winkel als F machen würde. Daher ist die so gefundene gerade Linie der Lage nach gegeben. Auf jeder Seite von AB können zwei gerade Linien durch C gezogen werden, welche mit AB gleiche (schiefe) Winkel bilden.

VI. Satz 33. Wenn an eine, der Lage nach, gegebene gerade Linie durch einen ausserhalb derselben gegebenen Punct eine gerade gezogen wird, welche mit jener einen gegebenen Winkel bildet, so ist auch diese Linie der Lage nach gegeben.

Es werde an die der Lage nach gegebene BC (Fig. 128.) durch einen ausserhalb derselben bestimmten Punct A eine gerade AD gezogen, welche mit ihr einen gegebenen Winkel ADB bildet, so ist auch diese AD der Lage nach gegeben.

Sonst würde, während A bliebe, die Lage der AD sich ändern. Bliebe bei der veränderten Lage AE der Winkel eben so groß, so wäre der ∡ ADB = ∡ AEB d. h. der größere gleich dem kleinern. Folglich ist AD der Lage nach gegeben.

§. 5.

Uebungs-Fragen.

I. Was versteht man unter den Data des Euclides? Welchen Werth hatten sie für die Analysis der Alten? Was bemerkte Kästner und Klügel hiervon? Einiges über die Ausgaben dieser Data? Auf welchen Hülfs-Erklärungen beruhen diese Data? Erläuterung derselben? (§. 1, 2.)

II. Erläuterung der in §. 3 und 4 angeführten Beispiele aus diesen Datis?

III. Lehrübung.

Lemmen des Archimedes.

§. 1.

Einige allgemeine Bemerkungen.

I. Die auf unsere Zeiten gekommenen Schriften des Archimedes, welcher als genialer Erfinder im Gebiete des mathematischen Wissens eine der ersten Stellen behauptet, sind folgende:

a) Von der Kugel und vom Cylinder, zwei Bücher.

b) Von der Kreismessung.

c) Von den Conoiden und Sphäroiden.

d) Von den Spirallinien.

e) Vom Gleichgewichte der Ebenen, zwei Bücher.

f) Von der Quadratur der Parabel, zwei Bücher.

g) Die Sandrechnung.

h) Von den schwimmenden Körpern, zwei Bücher, und

i) Die Lemmen.

II. Die Lemmen, welche mehrere zur geometrischen Analysis der Alten gehörige Sätze enthalten und nur im Arabischen vorkommen, sollen hier, ohne die Beweise, welche die Liebhaber des geometrischen Studiums selbst finden können, theils zur Kenntniß ihres Inhalts, theils zur lehrreichen Uebung beigebracht werden. Sie sind folgende fünfzehn.

§. 2.

Angabe der Lemmen des Archimedes.

I. Lemma 1. Wenn sich zwei Kreise AEB, CED (Fig. 129.) in einem Puncte E berühren und ihre Durchmesser CD, AB parallel sind, so werden die Puncte E, D, B, in einer geraden Linie liegen.

Lemma 2. Es sei ABC (Fig. 130.) ein Halbkreis, EB lothrecht auf EC, BD und CD eine Tangente, so ist, wenn die gerade AD gezogen wird, BF = FE.

Lemma 3. Es sei CA (Fig. 131.) ein Kreisabschnitt, B ein willkührlicher Punct in seinem Bogen-

BD ein Loth auf seine Sehne, DE = DA und der Bogen BF = Bogen AB, so wird CF = CE seyn.

Lemma 4. Es sei ABC (Fig. 132.) ein Halbkreis und es seien über seinem Durchmesser AC die beiden Halbkreise AD und DC beschrieben, auch sei DB lothrecht auf AC. Hier ist die Figur, welche von dem großen Halbkreise und von den zwei kleinern umschlossen wird, (Archimedes nennt sie Arbelos) dem Kreise um BD gleich.

Lemma. 5. Es sei AB (Fig. 133.) ein Halbkreis und C ein in seinem Durchmesser willkührlich gewählter Punct. Wird nun sowohl über AC, als über CB ein Halbkreis beschrieben, aus C das Loth CD gezogen und zu jeder Seite dieses Lothes ein Kreis beschrieben, welcher sowohl das Loth, als den großen Halbkreis und einen der kleineren berührt, so sind diese zwei Kreise einander gleich.

II. Lemma 6. Es sei ABC (Fig. 134.) ein Halbkreis und auf seinem Durchmesser AC ein Punct D so gewählt, daß sich AD:DC = 3:2 verhält, auch sei sowohl über AD als über DC ein Halbkreis beschrieben. Wenn nun ein Kreis GBH so beschrieben wird, daß er die drei Halbkreise in B, H und G berührt und man zieht dessen Durchmesser EF mit AC gleichlaufend, so soll das Verhältniß von AC : EF gefunden werden. (Es ist wie 19:6)

Lemma 7. Wenn ein Kreis um ein Quadrat beschrieben und ein zweiter Kreis in dieses Quadrat construirt wird, so ist der größere Kreis das Doppelte des kleinern. (Die Figur ist leicht zu entwerfen und der Beweis sehr einfach.)

Lemma 8. Wenn man die Sehne AB (Fig. 135.) eines Kreises verlängert, BC = BD macht, die gerade CD zieht und dieselbe bis E verlängert, so ist der Bogen AE das Dreifache des Bogens BF.

Lemma. 9. Wenn sich in einem Kreise zwei gerade Linien, AB, CD (Fig. 136.) deren kleine durch dessen Mittelpunct geht, unter rechten Winkeln schneiden, so sind die zwei Bogen AD und CB zusammen so groß als die beiden Bogen AC und DB zusammengenommen.

Lemma 10. Es sei ABC (Fig. 137.) ein Kreis, DA eine Tangente, DB eine Sekante und DC eine zweite Tangente. Wird nun CE mit DB gleichlaufend und die gerade EA gezogen, welche die DB in F schneidet, so wird, wenn von F auf EC das Loth FG gezogen ist, GE = GC seyn.

III. Lemma 11. Wenn sich zwei Sehnen AB, CD (Fig. 138.) in einem Puncte E schneiden, welcher nicht der Mittelpunct ist, so wird die Summe der Quadrate von AE, BE, EC und ED dem Quadrate des Durchmessers gleich seyn.

Lemma 12. Es sei ADEB (Fig. 139.) ein Halbkreis und von C die Tangente CD und CE gezogen. Wird nun sowohl EA als DB gezogen und von C nach F die gerade CF bis G verlängert, so wird CG ein Loth auf AB seyn.

Lemma 13. Es schneiden sich der Durchmesser AB und die Sehne CD (Fig. 140.) im Puncte L, und von A sei AE, von B aber BF lothrecht auf CD gezogen, so ist DE = CF.

Lemma 14. Es sei AB (Fig. 141.) ein Halbkreis. Man nehme AC = BD und beschreibe über jede von beiden und über CD einen Halbkreis, so ist E der Mittelpunct beider Halbkreise AGB und CFD. Hier muß der Kreis um GF, welche auf AB lothrecht steht, so groß seyn, als die von den vier Halbkreisen AGB, BD, DFC und CA eingeschlossene Figur (Archimedes nennt sie Salinon).

Lemma 15. Es sei AB (Fig. 142.) ein Halbkreis, AC die Seite des in ihn beschriebenen regulären Fünfecks und AD die Hälfte des Bogens ADC. Wird hier die gerade CD gezogen und über D verlängert, bis die über A verlängerte HA sie in E berühret, dann die gerade BD, welche die CA in F schneidet und endlich aus F auf AB das Loth FG gezogen, so muß EG der Radius des Kreises ACB seyn.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Etwas über die Geschichte und über den Begriff dieser Lemmen? (§. 1.)

II. Auffindung der Beweise für die fünfzehn Lemmen des Archimedes; auch Anführung der verschiedenen hierbei noch möglichen Fälle? (§. 2.)

IV. Lehrübung.

Etwas von den Porismen der Alten.

§. 1.

Begriff der Porismen.

I. Obwohl man weiß, daß das Wort Porisma eine besondere Art von Sätzen aus der Geometrie

der Alten bezeichnet, so ist der Begriff dieses Wortes nichts weniger als scharf bestimmt. Unter den verloren gegangnen Schriften des Euclides befanden sich drei Bücher mit der Aufschrift: Porismata. Nach dem Zeugnisse des Pappus enthielten sie sehr schwierige Aufgaben aus der Analysis der Alten. Die spätern Geometer hätten ihnen nichts mehr beizufügen gewußt und selbst ihre Natur nicht einmal recht erkannt, so wie auch ihre Erklärungen des Wortes Porisma allzueng seien. Pappus hat sich bemühet, durch Mittheilung vieler Sätze aus dem Werke des Euclides, das nöthige Licht hierüber zu verbreiten; allein seine Bemühungen waren ebenfalls unvollständig.

II. Am meisten Verdienst um die Wiederstellung der Euclidischen Porismen hat sich Robert Simson, der unermüdete Forscher in der Geometrie der Alten erworben. Sein vortreffliches Werk heißt: *Roberti Simson*, Matheseos nuper in Acad. Glasguensi Professoris opera quaedam reliqua, scilicet I. Apollonii Pergaei de sectione determinata Libri II. restituti, duobus insuper libris aucti; II. Porismatum liber, quo doctrinam hanc veterum Geometras ab oblivione vindicare et ad captum hodiernorum adumbrare constitutum est; III. de Logarithmis liber; IV. de limitibus quantitatum et rationum, fragmentum; V. Appendix, pauca continens problemata, ad illustrandam praecipue veterum Geometrarum analysin. Nunc primum post Auctoris mortem in lucem edita, impensis quidem Phil. Comitis Stanhope, cura vero Jac. Clow, in ead.

Acad. Phil. Prof. cui Auctor omnia sua manuscprita testamento legaverat ... Glasguae 1776. 4to.

III. Die Erklärung in Robert Simson, welche eben nicht vorzüglich klar ist, heißt so: Porisma est Propositio, in qua proponitur demonstrare rem aliquam, vel plures datas esse, cui, vel quibus, ut et cuilibet ex rebus innumeris, non quidem datis, sed quae ad ea quae data sunt, eandem habent rationem, convenire ostendendum est affectionem quandam communem in propositione descriptam. Klügel (Mathem. Wörterb. Art. Porisma) bemerkt hierbei, die Construction scheine fast die Mühe zu zeigen, welche diese Erklärung gekostet habe. Auch sei das Wort data zweideutig, indem es sowohl was eine bekannte gegebene Größe hat, als auch jenes bedeutet, was einen bestimmten unveränderlichen Werth oder eine solche Lage hat.

Dieser Erklärung fügt Rob. Simson (S. 324) noch folgendes bei: Porisma etiam in forma Problematis enuntiari potest, si nimirum ea, quae data demonstranda sunt, invenienda proponantur.

Klügel selbst gibt folgende Erklärung. Porisma ist ein Satz, in welchem ausgesagt wird, daß einem oder mehreren gegebenen (unveränderlichen) Dingen, so wie auch unzählig vielen Dingen, die zwar nicht gegeben werden, aber zu den gegebenen Dingen eine bestimmte Relation haben, eine gewisse gemeinschaftliche Beschaffenheit zukomme.

Oder: Porisma ist eine Aufgabe, worin gefodert wird, etwas Bestimmtes, das mit einem Unbestimmten nach einem gewissen Gesetze verknüpft sei, zu finden.

§. 2.

Beispiel eines Porisma nach Robert Simson.

I. Wenn die gerade Linie AB (Fig. 143.) der Lage nach und der Kreis CD der Lage und Größe nach gegeben ist, so wird ein Punct gegeben seyn, der die Eigenschaft hat, daß, wenn irgend eine gerade durch ihn gezogene Linie sowohl die AB als den Kreis CD durchschneidet, ein Rechteck aus ihren Segmenten von bestimmter unveränderlicher Größe ist.

Es sei E der in dem Porisma zu findende Punct und die durch ihn gezogene gerade Linie GEF treffe die AB in F und den Kreis CD in G, so ist, nach der Hypothese, das Rechteck aus EF und EG gegeben.

Wird nun aus E das Loth EH gezogen und rückwärts bis K verlängert, hierauf KG gezogen, so ist auch, ebenfalls nach der Hypothese, das Rechteck aus EH und EK gegeben, welches jenem aus EF und EG gleich ist. Daher muß FE : EH = KE : EG seyn. Da auch ∡ FEH = ∡ KEG, so ist ∡ KGE = ∡ EHF = R. Wird nun EK in L halbirt und LG gezogen, so ist LG = LK = LE (Geom. Jug. Fr. S. 143.) Auf ähnliche Art müssen alle von L zur Peripherie gezogne gerade Linien einander gleich seyn. Daher ist L der Mittelpunct des gegebenen Kreises CD und E befindet sich in seinem Umfange. Da nun der Kreis CD gegeben ist, so muß auch dessen Mittelpunct, somit auch das Loth LH und der Punct E, H, K gegeben seyn. Folglich ist auch

das Rechteck aus EH, EK, gleich dem Rechtecke aus EF, EG, gegeben.

II. Die Composition ist einfach folgende. Man ziehe aus dem Mittelpuncte L des gegebenen Kreises CD ein Loth LH auf die gegebene gerade AB und verlängere EL nach K, so ist E und K der zu findende Punct, und wenn man durch E irgend eine aus gerade FEG zieht, so muß immer das Rechteck EF und EG dem Rechtecke aus EH und EK gleich seyn.

Denn wenn man die GK zieht, so ist $\measuredangle$ EGK = R = $\measuredangle$ EHF und daher, weil noch $\measuredangle$ GEK = $\measuredangle$ FEH, auch $\triangle$ GEK $\sim$ $\triangle$ FEH, woraus GE : EK = HE : EF d. h. GE $\times$ EF = EK $\times$ HE folget.

III. Zur Erläuterung der oben (§. 1, III.) gegebenen Erklärung fügt Simson nun Folgendes bei: In diesem Porisma ist der Punct E das als gegeben zu Beweisende, und die unzählig vielerlei Dingen, welche in Bezug auf diesen Punct E, auf die gegebene gerade AB und auf den gegebenen Kreis CD dieselbige Relation haben, sind die Segmente EF und EG aller durch E möglichen Linien. Die gemeinschaftliche, als wahr zu beweisende Eigenschaft (communis affectio) aller dieser Segmente ist, daß das durch sie bestimmte Rechteck ein gegebenes sei. Und eben dieses Rechteck mußte gefunden werden.

§. 3.

Zweites Beispiel nach Rob. Simson.

I. Wenn der Kreis BCD (Fig. 144.) der Lage und Größe nach und ausserhalb desselben ein Punct

A gegeben ist, so wird, wenn man von irgend einem Puncte des Umfanges F, H . . . gerade Linien nach A zieht, noch ein anderer Punct E gegeben seyn, der die Eigenschaft hat, daß, wenn die geraden FE, HE . . . gezogen werden, das Verhältniß AF : FE, AH : HE . . . ein gegebenes ist.

Man nehme an, das Prisma sei wahr und E der zufindende Punct. Zieht man nun die gerade AE, verlängert dieselbe bis $\angle EFG = \angle EAF$, so sind die beiden Dreiecke, GAF und GFE weil $\angle FEG = \angle FAE + \angle AFE = \angle EFG + \angle AFE = \angle AFG$ ist, einander ähnlich und man hat $AF : FE = AG : GF = GF : GE$. Daher auch $AG^q : GF^q = AG : GE$ und $AF^q : FE^q = AG : GE$.

II. Nimmt man nun irgend einen andern Punct im Umfange, z. B. H, zieht HA und HE, so muß ebenfalls $HA : HE = AF : FE$ seyn. Daher ist auch $AH^q : HE^q = AG : GE$ und (nach einem Hülfssatze) das Rechteck aus AG und GE dem Quadrate aus GH gleich. Da aber $AG : GF = GF : GE$ und folglich das Rechteck aus AG und GE auch dem Quadrate von GF gleich ist, so muß $GH = GF$ seyn. Da nun dieses von jeder andern aus dem Umfange nach G gezogenen Linie gilt, so muß G der Mittelpunct des gegebenen Kreises und folglich selbst gegeben seyn. Allein der Punct A war auch gegeben. Daher ist AG gegeben, welche ein gegebenes Verhältniß zur gegebenen GF hat. Diesem Verhältnisse sind aber die Verhältnisse AF : FE; AH : HE . . . gleich. Daher sind auch letztere gegeben und somit ist auch GE, der

Lage und Größe nach, gegeben, so wie endlich der Punct E.

III. Die Composition ist folgende. Wenn der gegebene Punct A und der gegebene Mittelpunct G durch die gerade AG verbunden und nun zu AG, GK die dritte Proportionallinie gesucht wird, so ist diese = GE, woraus E der gesuchte Punct und AG : GK das gesuchte Verhältniß wird. Denn wenn man die Linien AF und EF zieht, so ist AF : FE = AG : GK. Man ziehe FG, so ist auch AG : GK = GF : GE und die Dreiecke GAF und GFE haben gleiche Winkel. Daher AF : FE = AG : GF (= GK).

IV. In diesem Porisma war der Punct E als gegeben zu beweisen, wodurch die unendlich vielen Linien, wie AF, FE; AH, HE . . . ein unveränderliches Verhältniß zusammen haben, welches eben die ihnen gemeinschaftliche Eigenschaft (communis affectio) ist.

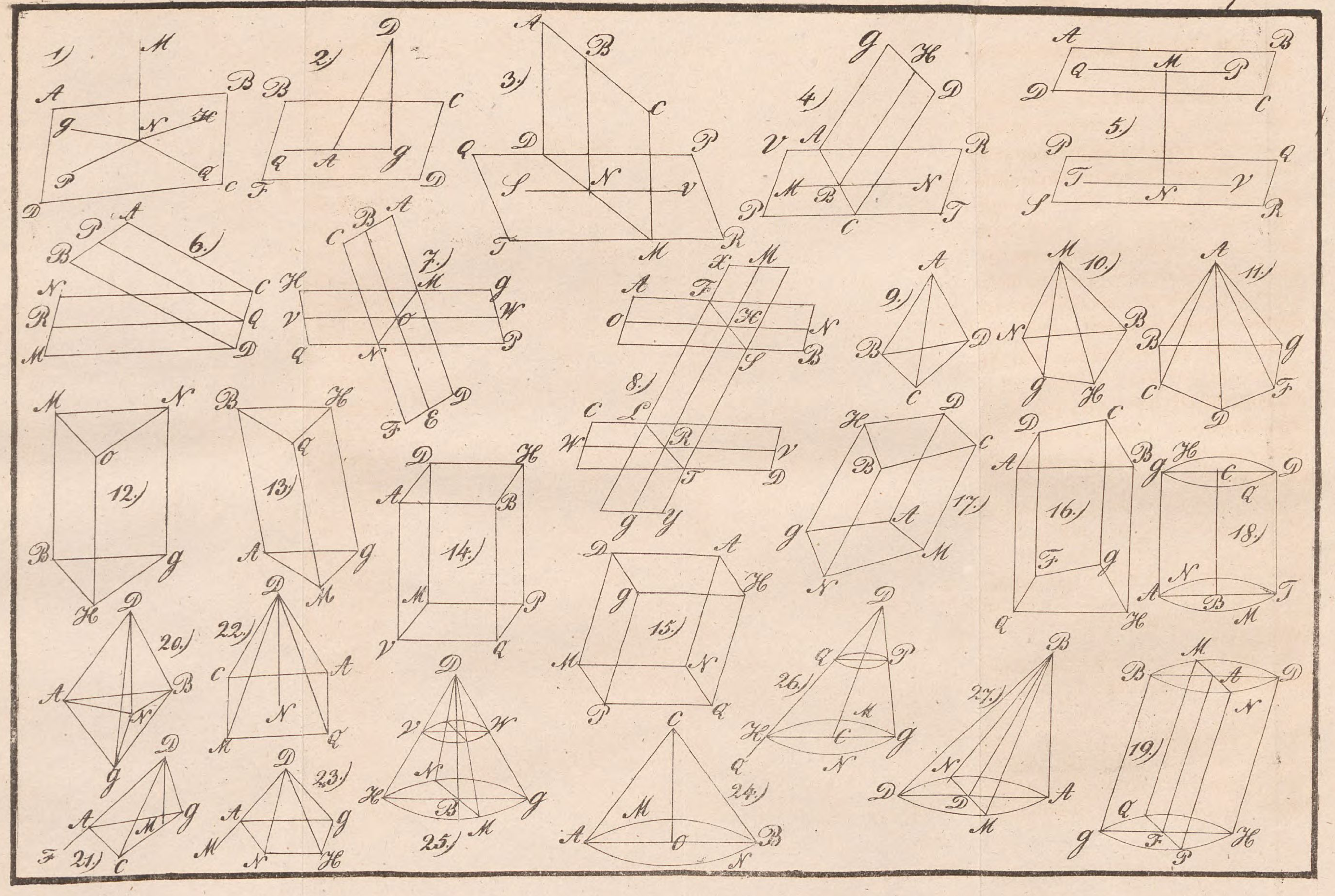
§. 4.

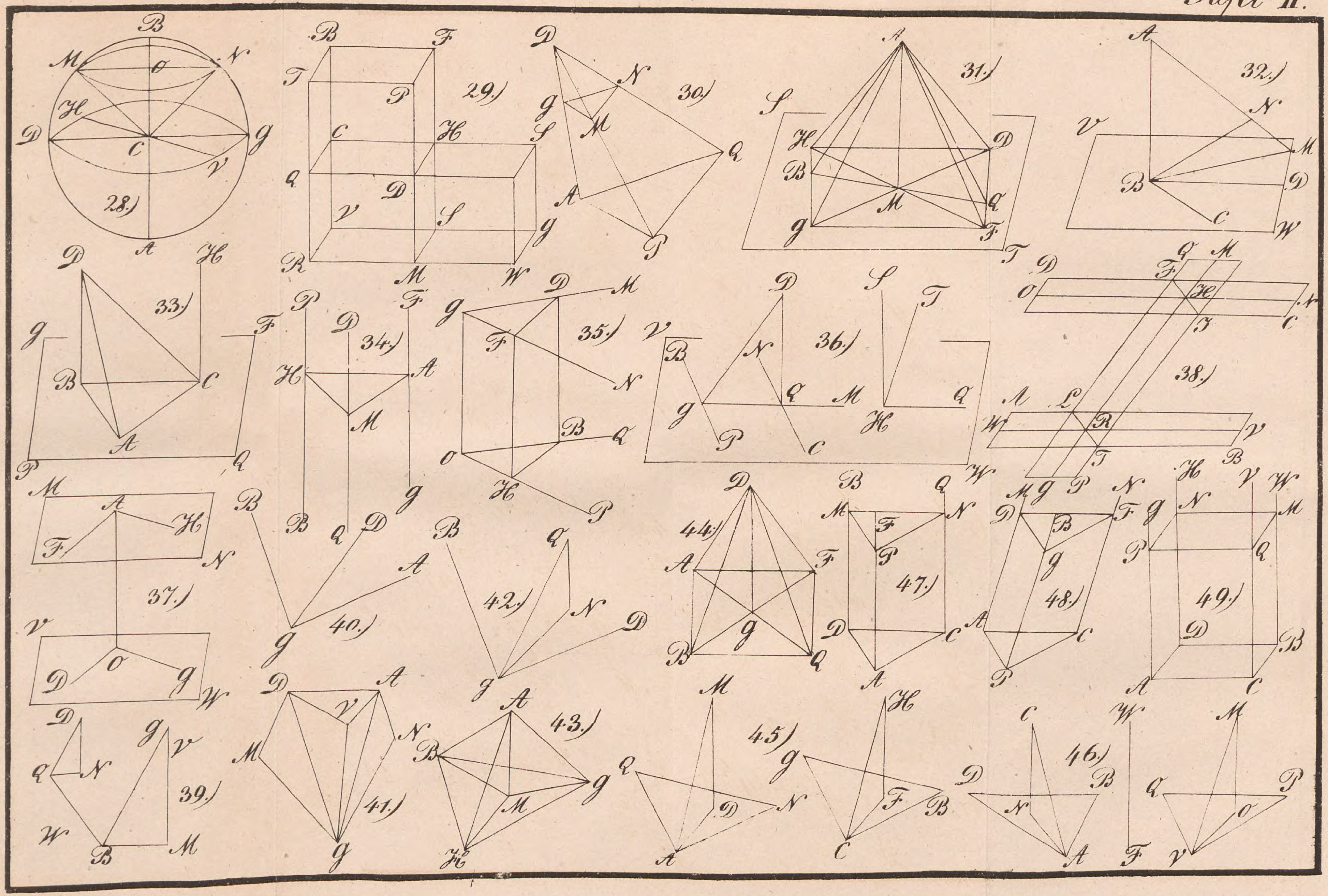
Uebungs-Fragen.

I. Angabe einiger geschichtlichen Notizen über die Porismen? Bestimmung des Begriffs nach Robert Simson und Klügel? (§. 1.)

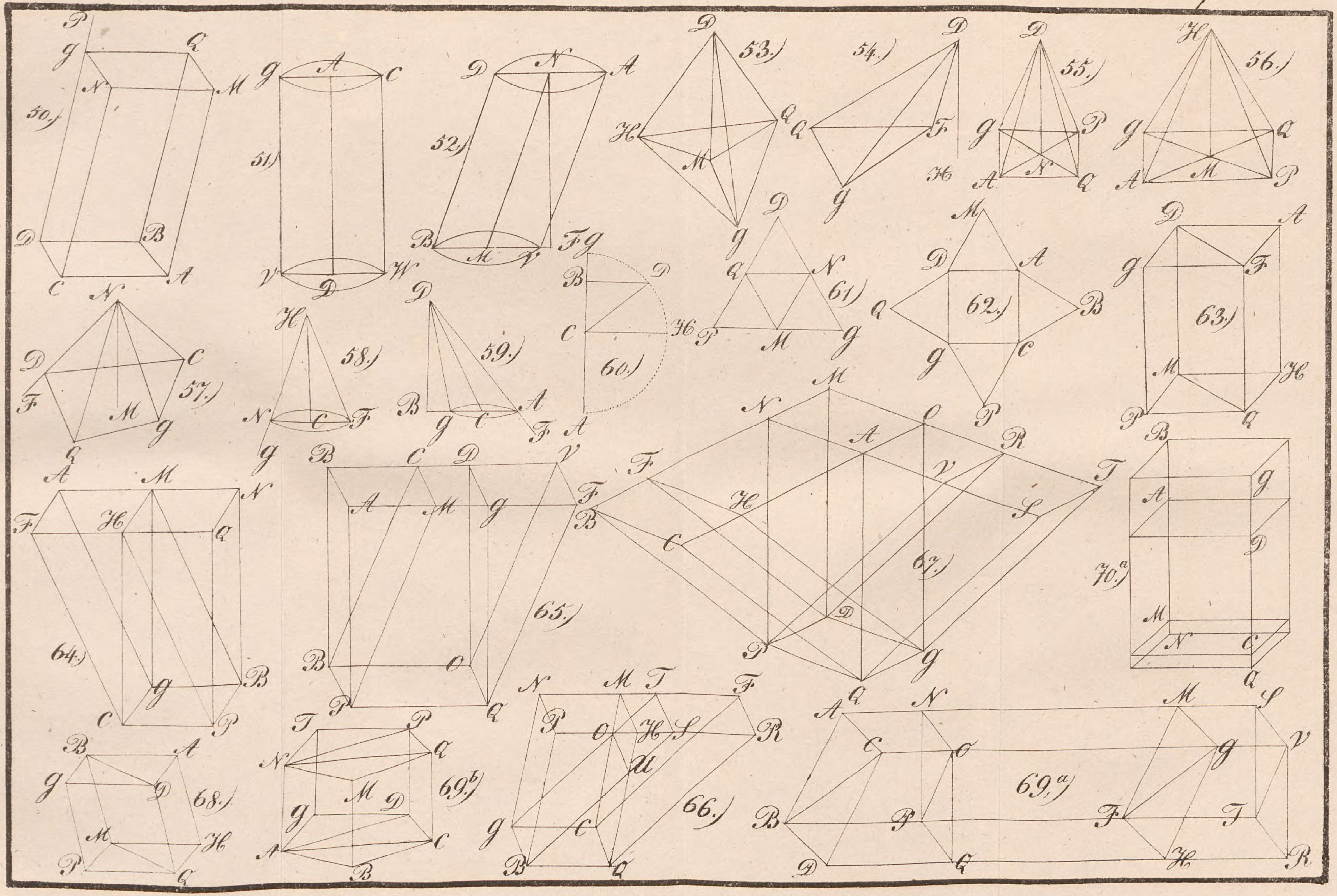
II. Erläuterung dieser Begriffe in zwei Beispielen nach Robert Simson? (§. 2 und 3.)

Tafel I.

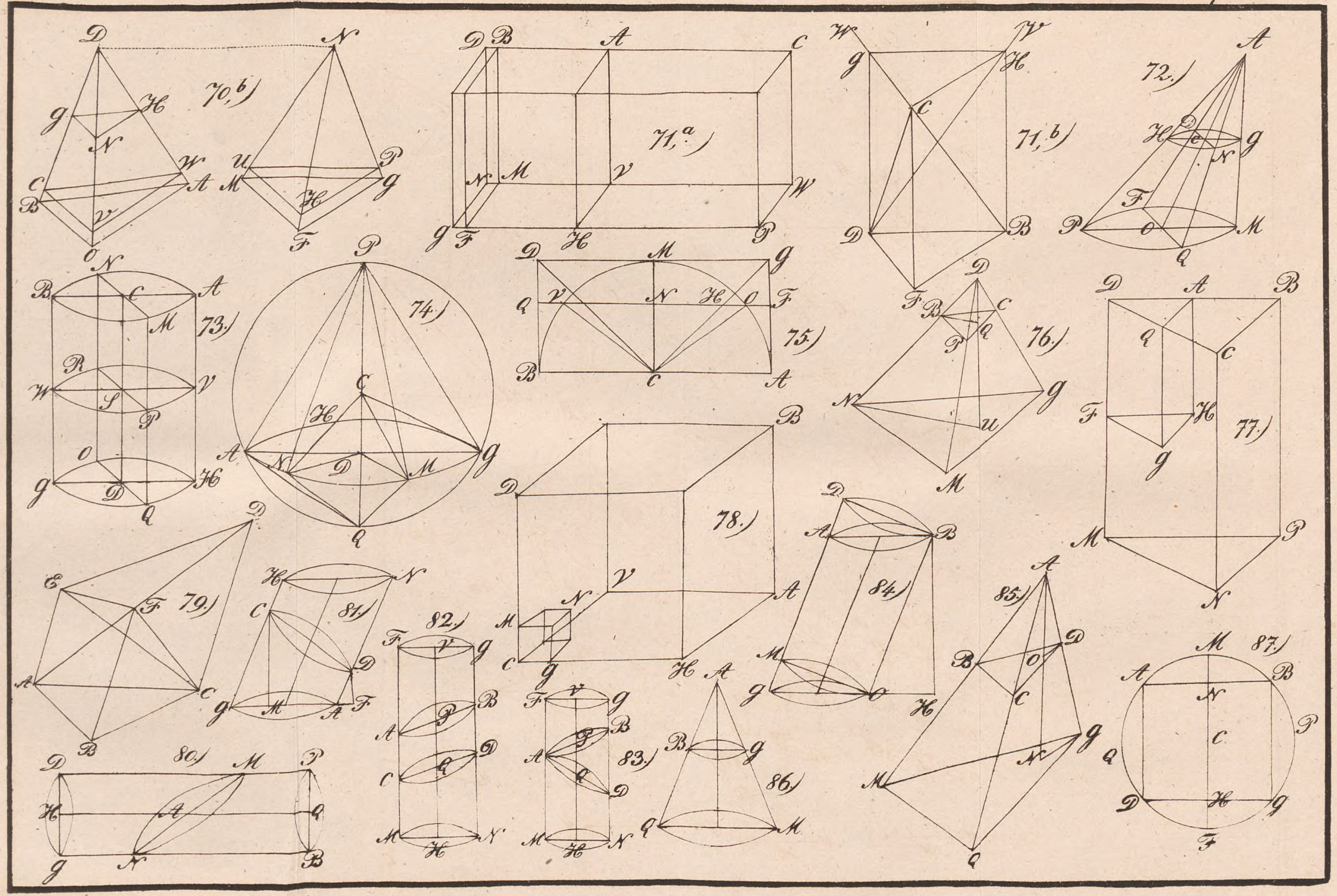



28.)
29.)
30.)
31.)
32.)
33.)
34.)
35.)
36.)
37.)
38.)
39.)
40.)
41.)
42.)
43.)
44.)
45.)
46.)
47.)
48.)
49.)

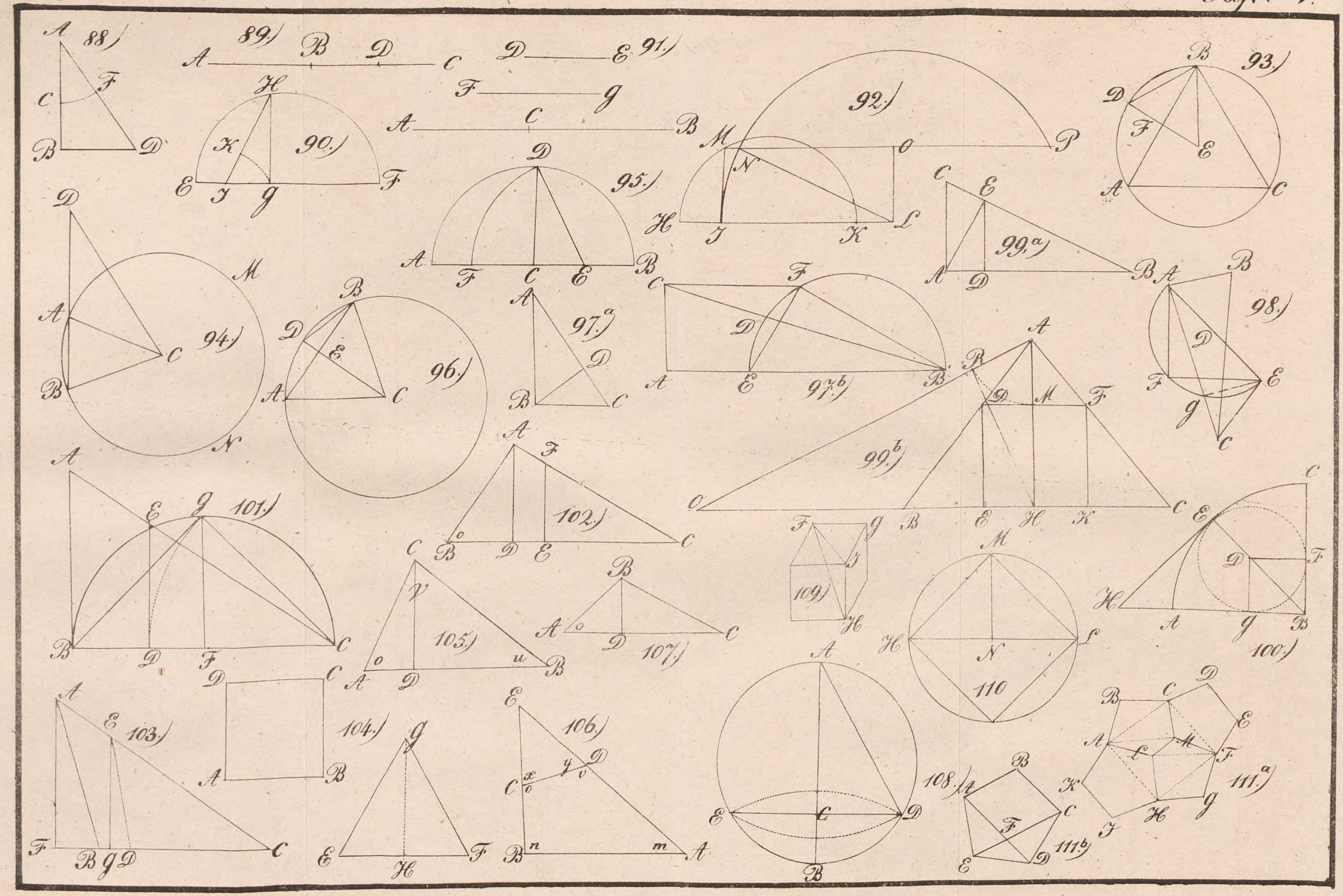
Tafel. III.



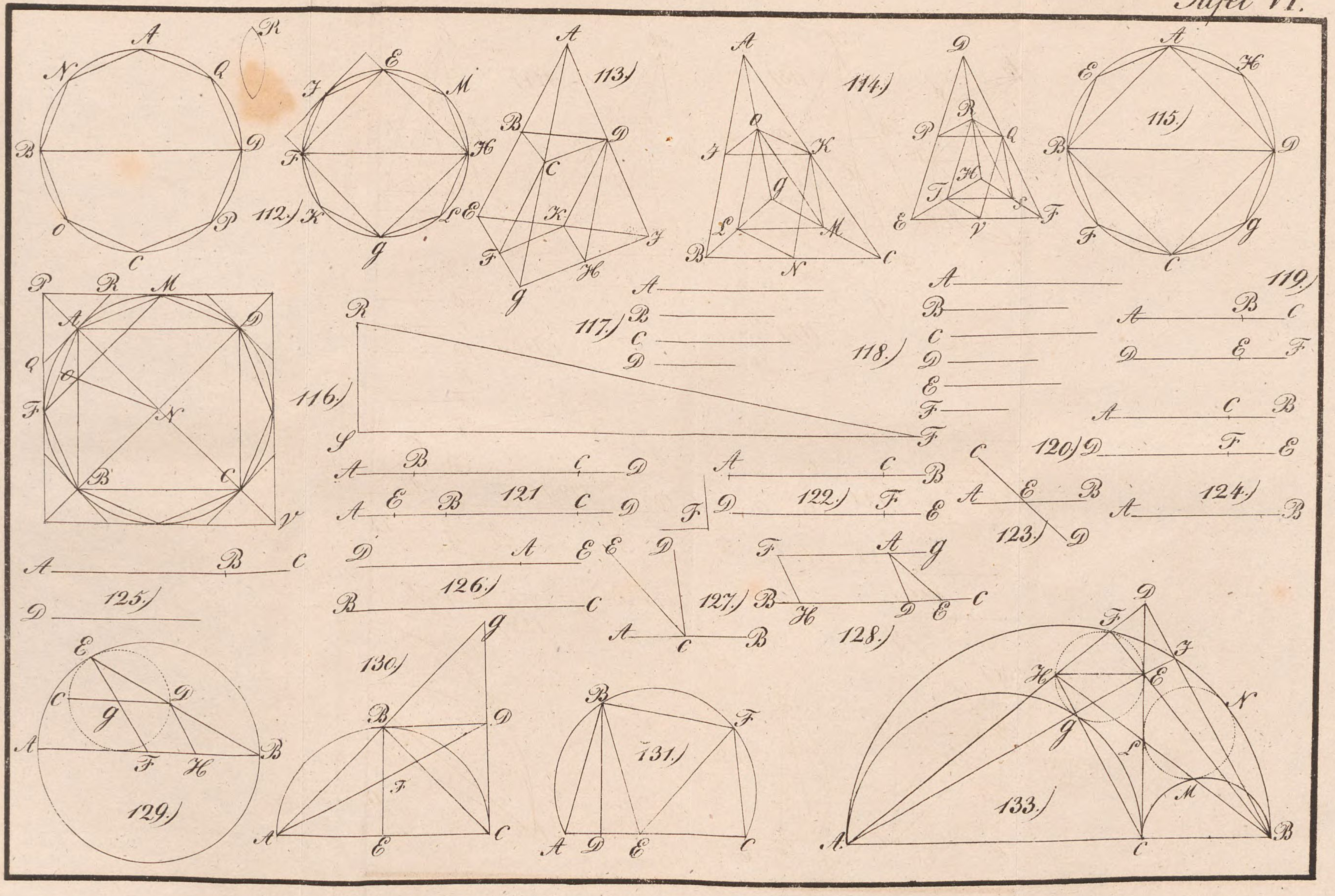
Tafel IV.



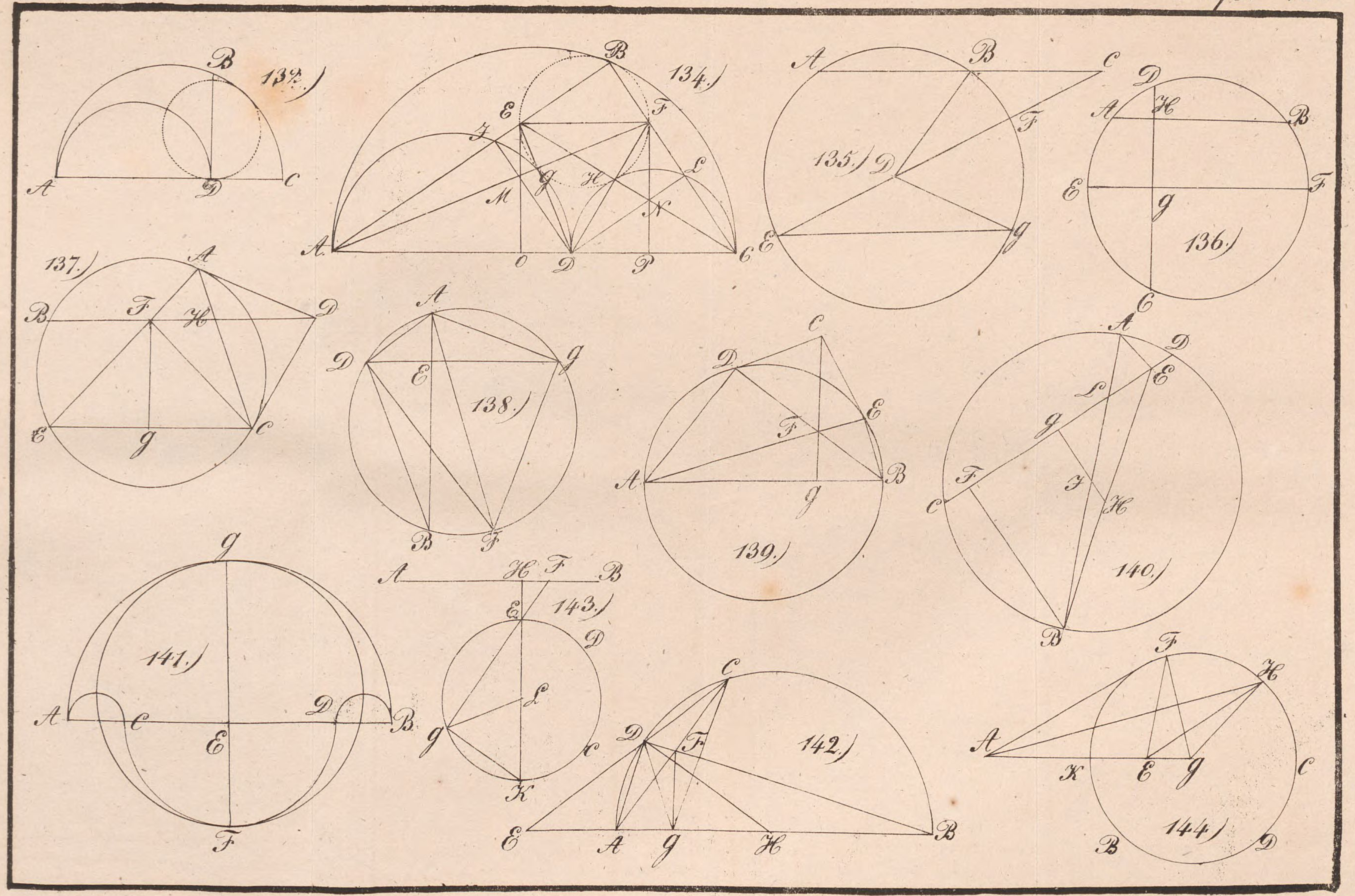
Tafel V.



88.)
89.)
90.)
91.)
92.)
93.)
94.)
95.)
96.)
97.a
97.b)
98.)
99.a)
99.b)
100.)
101.)
102.)
103.)
104.)
105.)
106.)
107.)
108.)
109.)
110
111.a)
111.b)


112.)
113.)
114.)
115.)
116.)
117.)
118.)
119.)
120.)
121
122.)
123.)
124.)
125.)
126.)
127.)
128.)
129.)
130.)
131.)
133.)

Tafel VII.



Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hoffmann, Johann Josef Ignaz <<von>>,

Der mathematische Jugendfreund oder populäre Darstellung der Grundlehren der reinen und angewandten Mathematik für Anfänger

Bd.: 4

Mainz 1827

Math.u. 72 r-4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10593936-2